ТОМ 24, №2, 2024
eISSN 2687-1653
РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Механика / Mechanics

Машиностроение и машиноведение / Machine Buiding and Machine Science

Информатика, вычислительная техника и управление / Information Technology, Computer Science and Management



www.vestnik-donstu.ru
DOI 10.23947/2687-1653



Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Рецензируемый научно-практический журнал (издается с 2000 года)

eISSN 2687–1653
DOI: 10.23947/2687–1653

Том 24, № 2, 2024

Создан в целях информирования читательской аудитории о новейших достижениях и перспективах в области механики, машиностроения, информатики и вычислительной техники. Издание является форумом для сотрудничества российских и иностранных ученых, способствует сближению российского и мирового научно-информационного пространства.

Журнал включен в перечень рецензируемых научных изданий, в котором должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень ВАК) по следующим научным специальностям:

1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин (технические науки)
1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (технические, физико-математические науки)
1.1.9 – Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)
1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)
2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (технические науки)
2.3.3 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (технические науки)
2.3.5 – Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей (технические науки)
2.3.7 – Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования (технические, физико-математические науки)
2.3.8 – Информатика и информационные процессы (технические науки)
2.5.2 – Машиноведение (технические науки)
2.5.3 – Трение и износ в машинах (технические науки)
2.5.5 – Технология и оборудование механической и физико-технической обработки (технические науки)
2.5.6 – Технология машиностроения (технические науки)
2.5.8 – Сварка, родственные процессы и технологии (технические науки)
2.5.9 – Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды (технические науки)
2.5.10 – Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы (технические науки)

Индексация и архивация:	РИНЦ, CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar
Наименование органа, зарегистрировавшего издание	Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации ЭЛ № ФС 77 – 78854 от 07 августа 2020 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Учредитель и издатель	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ)
Периодичность	4 выпуска в год
Адрес учредителя и издателя	344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail	vestnik@donstu.ru
Телефон	+7 (863) 2–738–372
Сайт	http://vestnik-donstu.ru
Дата выхода в свет	30.06.2024





Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)

Peer-reviewed scientific and practical journal (published since 2000)

eISSN 2687–1653
DOI: 10.23947/2687–1653

Vol. 24, no. 2, 2024

The journal is aimed at informing the readership about the latest achievements and prospects in the field of mechanics, mechanical engineering, computer science and computer technology. The publication is a forum for cooperation between Russian and foreign scientists, it contributes to the convergence of the Russian and world scientific and information space.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific publications (Higher Attestation Commission under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation), where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Science in scientific specialties and their respective branches of science should be published.

The journal publishes articles in the following fields of science:

– Theoretical Mechanics, Dynamics of Machines (Engineering Sciences)
– Deformable Solid Mechanics (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
– Mechanics of Liquid, Gas and Plasma (Engineering Sciences)
– Mathematical Simulation, Numerical Methods and Program Systems (Engineering Sciences)
– System Analysis, Information Management and Processing, Statistics (Engineering Sciences)
– Automation and Control of Technological Processes and Productions (Engineering Sciences)
– Software and Mathematical Support of Machines, Complexes and Computer Networks (Engineering Sciences)
– Computer Modeling and Design Automation (Engineering, Physical and Mathematical Sciences)
– Computer Science and Information Processes (Engineering Sciences)
– Machine Science (Engineering Sciences)
– Machine Friction and Wear (Engineering Sciences)
– Technology and Equipment of Mechanical and Physicotechnical Processing (Engineering Sciences)
– Engineering Technology (Engineering Sciences)
– Welding, Allied Processes and Technologies (Engineering Sciences)
– Methods and Devices for Monitoring and Diagnostics of Materials, Products, Substances and the Natural Environment (Engineering Sciences)
– Hydraulic Machines, Vacuum, Compressor Equipment, Hydraulic and Pneumatic Systems (Engineering Sciences)

Indexing and Archiving	RSCI, CyberLeninka, CrossRef, Dimensions, DOAJ, EBSCO, Index Copernicus, Internet Archive, Google Scholar
Name of the Body that Registered the Publication	Extract from the Register of Registered Mass Media ЭЛ № ФС 77 – 78854 dated August 07, 2020, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media
Founder and Publisher	Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education Don State Technical University (DSTU)
Periodicity	4 issues per year
Address of the Founder and Publisher	1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation
E-mail	vestnik@donstu.ru
Telephone	+7 (863) 2–738–372
Website	http://vestnik-donstu.ru
Date of Publication	30.06.2024

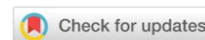


Содержание

Contents

МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 51-71, 517.442, 629.4.015, 62-752, 681.5

Оригинальное эмпирическое исследование

https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-125-134

Возможности оценки динамических состояний железнодорожных транспортных средств: структурное математическое моделирование



EDN: PEUPEC

Р.С. Большаков ✉, **В.Е. Гозбенко**, **К.Ч. Вьюнг**

Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

✉ bolshakov_rs@mail.ru

Аннотация

Введение. Увеличение скоростей движения железнодорожного транспорта и повышение нагрузок на оси колесных пар обуславливают необходимость модернизации существующего парка. Научные исследования в области динамики подвижного состава направлены на учёт колебательных процессов, возникающих при движении железнодорожных транспортных средств в традиционном конструктивном исполнении. Присоединение дополнительных элементов рассматривалось на уровне сцепки двух вагонов и присоединении третьей тележки в центре тяжести железнодорожной платформы. Построению математических моделей, позволяющих оценить динамические состояния таких конструктивных решений, в научной литературе не уделено достаточно внимания. Цель данного исследования — создать метод оценки динамических состояний вагона. Рассматривается ситуация, когда в его структуру вводится дополнительная совокупность масс-инерционных и упругих элементов, причем от корректировки их параметров зависит общее динамическое состояние транспортного средства.

Материалы и методы. Базовым инструментом проведения исследований является структурное математическое моделирование, в основе которого лежит подход, когда исходная расчетная схема представляет собой механическую колебательную систему в виде твердого тела на упругих опорах с дополнительной введёнными в её структуру типовыми элементами. Динамическим аналогом используемой расчетной схемы является структурная схема системы автоматического управления, применение которой позволяет детализировать связи между типовыми упругими и масс-инерционными элементами.

Результаты исследования. Предложен метод оценки динамических состояний железнодорожных транспортных средств, основанный на построении математических моделей, с учетом введения дополнительной структуры масс-инерционных и упругих элементов. Исследовано влияние дополнительных параметров на динамическое состояние транспортного средства. Получены аналитические соотношения, позволяющие при изменении соответствующих параметров технического объекта снизить динамические нагрузки на основные конструктивные упругие элементы. Приведена передаточная функция межпарциальных связей, позволяющая контролировать взаимодействие между координатами движения транспортного средства при действии двух кинематических возмущений синфазного типа.

Обсуждение и заключение. Сформированная математическая модель позволяет оценить динамическое состояние железнодорожного транспортного средства в условиях действия кинематических возмущений. Результаты исследований могут быть применены при модернизации существующих и создании новых транспортных средств с улучшенной динамикой.

Ключевые слова: динамика транспортных средств, динамическое состояние, структурное математическое моделирование, структурная схема

Благодарности. Авторы выражают благодарность заслуженному деятелю науки РФ, д.т.н., профессору Елисееву С.В., а также редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Для цитирования. Большаков Р.С., Гозбенко В.Е., Вьюнг К.Ч. Возможности оценки динамических состояний транспортных средств: структурное математическое моделирование. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):125–134. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-125-134

Original Empirical Research

Assessment of Dynamic States of Railway Vehicles: Structural Mathematical Modeling

Roman S. Bolshakov ✉, **Valery E. Gozbenko**, **Vuong Quang Truc**
Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation
✉ bolshakov_rs@mail.ru

Abstract

Introduction. The speed rise of railway transport and an increase in the loads on the axles of wheelsets necessitate the modernization of the existing fleet. Scientific studies in the field of rolling stock dynamics are aimed at taking into account the oscillatory processes that occur during the movement of railway vehicles in a traditional design. The attachment of supplementary elements was considered at the coupling level of two cars and the attachment of a third trolley in the center of gravity of the railway platform. The scientific literature has not paid enough attention to the construction of mathematical models that make it possible to assess the dynamic states of such constructive solutions. The objective of this study is to create a method for evaluating the dynamic conditions of a car. The situation is considered when an additional set of mass-inertial and elastic elements is introduced into its structure, and the general dynamic condition of the vehicle depends on the adjustment of their parameters.

Materials and Methods. The basic research tool is the structural mathematical modeling, which is based on an approach where the source design scheme is a mechanical oscillatory system in the form of a solid body on elastic supports with supplementary typical elements introduced into its structure. The dynamic analogue of the calculation scheme used is the block diagram of the automatic control system, the use of which provides detailing the connections between typical elastic and mass-inertia elements.

Results. A method for estimating the dynamic states of railway vehicles is proposed. It is based on the construction of mathematical models, taking into account the introduction of an additional structure of mass-inertia and elastic elements. The impact of additional parameters on the dynamic condition of the vehicle is investigated. Analytical relations have been obtained that provide reducing the dynamic loads on the major structural elastic elements when changing the corresponding parameters of a technical object. The transfer function of interpartial relations is given, which provides controlling the interaction between the coordinates of the vehicle movement under the action of two kinematic disturbances of the in-phase type.

Discussion and Conclusion. The generated mathematical model provides for assessment, monitoring and control of the dynamic state of the vehicle under conditions of kinematic disturbances. The research results can be used to modernize existing vehicles and create new ones with improved dynamics.

Keywords: vehicle dynamics, dynamic condition, structural mathematical modeling, block diagram

Acknowledgements. The authors would like to thank Honored Scientist of the Russian Federation, Dr.Sci. (Engineering), Professor S.V. Eliseev, as well as the Editorial board and reviewers for their attentive attitude to the article, and for the above comments, which made it possible to improve its quality.

For Citation. Bolshakov RS, Gozbenko VE, Vuong Quang Truc. Assessment of Dynamic States of Railway Vehicles: Structural Mathematical Modeling. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):125–134. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-125-134

Введение. Расширение технико-экономических связей межрегионального уровня, обеспечение роста производственно-технического потенциала страны и поддержание разрастающейся системы международных торгово-коммерческих отношений во многом зависит и опирается на железнодорожный транспорт [1]. Объёмы перевозок, выполняемых железнодорожным транспортом, постоянно возрастают, что обусловливает необходимость учета нежелательных эффектов от повышения динамических нагрузок [2], напрямую влияющих на надежность эксплуатации как подвижного состава, так и верхнего строения пути. Несмотря на наличие таких негативных факторов, необходимо выполнять плановые показатели, к которым можно отнести повышение участковой скорости, соблюдение норм веса и длины составов, увеличение осевой нагрузки до 30 тонн и более. Это отражает реальные запросы развития российской экономики и стимулирует создание новых более мощных локомотивов, обновление парка подвижных средств, модернизацию путевого хозяйства [3]. Вместе с тем нельзя не рассматривать и возможности проявления негативных последствий интенсификации перевозочных процессов. Одним из важных вопросов является возрастание или увеличение темпов износа верхнего строения пути с соответствующими вытекающими сложностями [4].

В текущий момент времени повышенное внимание уделяется развитию методологии оценки динамического состояния подвижного состава, взаимодействию технических средств с рельсовыми путями, экономии электроэнергии, повышению надёжности и безопасности перевозочных процессов. Методология математического моделирования описана, например, в [5]. Вместе с тем, существуют и другие возможности для поиска рациональных решений [6]. Важно уделить внимание вопросам модернизации существующего парка грузовых вагонов, эксплуатация которых при повышенных нагрузках уже не является эффективной [7]. Одним из подходов, который мог бы быть принят к разработке, является концепция установки для грузовых 4-осных вагонов дополнительной двухосной тележки [8]. В этом случае можно ожидать более равномерного распределения нагрузки на верхнее строение пути, а также возможность увеличения веса перевозимых грузов при сохранении регламента на значения осевой нагрузки в пределах 22 т [9]. Неравномерность параметров контакта колесо-рельс инициирует колебательные движения вагона, что формирует в свою очередь колебательные движения корпуса вагона. Процесс колебаний формируется также условиями взаимодействия вагонов внутри состава [10]. В этом случае возникают динамические реакции связей, накладывающиеся на статические составляющие полной реакции, что может существенно увеличить уровень динамических взаимодействий в контакте колесо-рельс [11, 12]. Однако возможностям структурного математического моделирования при оценке динамических состояний железнодорожных транспортных средств при введении дополнительных связей пока не уделялось достаточно внимания. Поэтому целью данного исследования явилось формирование метода оценки динамических состояний железнодорожного транспортного средства при введении в его структуру дополнительной совокупности масс-инерционных и упругих элементов, корректировка параметров которых будет влиять на общее динамическое состояние транспортного средства.

Материалы и методы. Методологической основой исследований выбрана структурная теория виброзащитных систем, позволяющая в линейной постановке с учетом сосредоточенных параметров и малых колебаний относительно положения статического равновесия или установившегося процесса, достаточно точно оценить динамические свойства железнодорожного транспортного средства. Расчётной схемой является механическая колебательная система с динамическим эквивалентом в виде структурной схемы системы автоматического управления. Это позволяет детализировать связи между элементами транспортного средства, а также использовать методы, характерные для теории автоматического управления (передаточные функции, преобразования структурных схем, свертки и упрощения, частотные характеристики) [13].

Стандартные конструктивные схемы грузовых железнодорожных транспортных средств описываются известными расчётными схемами, а их динамические особенности можно оценить с использованием линейных расчётных схем. Рассматривается железнодорожное транспортное средство в виде грузового четырехосного вагона, предназначенного для перевозки тяжёлых грузов, таких как каменный уголь, руда, песок, металлопрокат, малогабаритные металлические конструкции и др. (рис. 1).

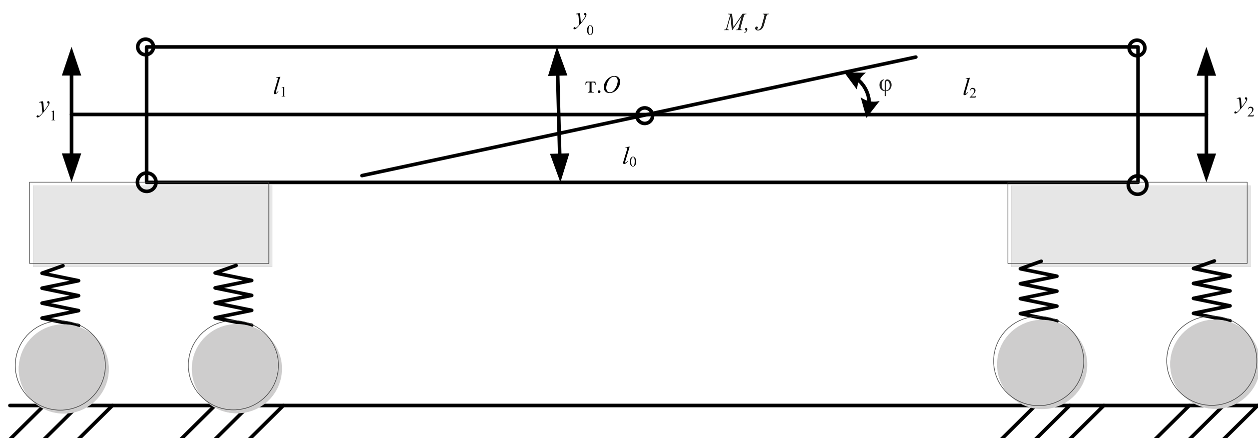


Рис. 1. Принципиальная схема грузового четырехосного вагона

Структура представленного железнодорожного транспортного средства содержит кузов, обладающий массой M, моментом инерции J и опирающийся на две двухосные тележки, условно представленные как совокупности масс-инерционных и упругих элементов. Динамические особенности рассматриваемой системы показывают наличие избыточного влияния на конструктивные элементы тележек железнодорожного транспортного средства. В этой связи для улучшения его динамических свойств в структуру подвески дополнительно вводится третья двухосная тележка, которая размещается в центре вагона (рис. 2).

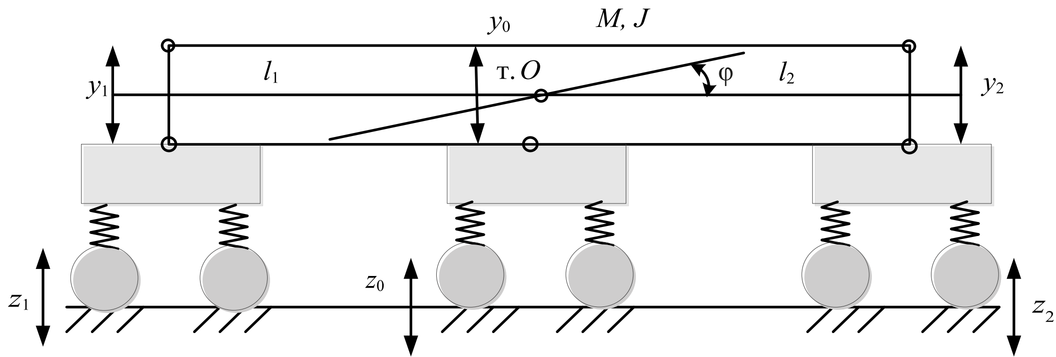


Рис. 2. Принципиальная схема грузового шестиосного вагона

При собственном весе вагона около 23 тонн и осевой нагрузке в 22 тонны, это может обеспечить увеличение веса перевозимых грузов ориентировочно на 20 тонн, то есть существенно повысить эффективность перевозочных процессов, не создавая излишних динамических нагрузок на верхнее строение пути (ВСП). Практическая реализация предлагаемого подхода требует модернизации конструкции типового вагона, которая заключается в создании узла крепления дополнительной тележки для уменьшения нагрузки на ось грузового вагона за счёт введения дополнительной двухосной тележки. Модернизация узла крепления осуществляется в тех же конструктивно-технических формах, что и крепления с использованием шкворней в двух «штатных» двухосных тележках, то есть через установку надшкворневой и подшкворневой балок с соответствующим шкворневым узлом стандартного типа.

Предлагаемая методика повышения эффективности использования четырехосных грузовых вагонов в условиях дополнительных нагружений ориентирована на решение проблемы повышения нагрузки на ось колёсной пары до 30 тонн и увеличении скорости движения поездов. Это достигается модернизацией типового грузового вагона путём установки дополнительной двухосной тележки соответствующим устройством, обеспечивающим условия её динамического взаимодействия с конструкцией рамы грузового вагона.

Установка дополнительной двухосной тележки за счёт перераспределения нагрузки между общим набором колёсных пар обеспечивает возможности перевозки грузов больших по весу при одновременном снижении нагрузки на ось. Это обеспечивает более рациональные условия эксплуатации рельсового пути и верхнего строения железнодорожного полотна при сохранении приемлемой длины состава.

Предполагается, что шкворневый узел будет иметь упругую резиновую прокладку, обеспечивающую амортизацию взаимодействия тележки и рамы корпуса вагона. При этом не предполагается модернизация дисков колесных пар. Изменяются лишь форма проводки элементов «штатной» пневматической системы торможения состава и конфигурация проводки пневмопроводов.

Результаты исследования. Расчётная схема рассматриваемого железнодорожного транспортного средства в первом приближении может быть представлена в виде механической колебательной системы, состоящей из твёрдого тела, обладающего массой *m,* и моментом инерции *J*, опирающемся на три упругих элемента с жесткостями k_1, k_0, k_2. Кинематические воздействия представлены синфазными гармоническими функциями одной частоты (рис. 3).

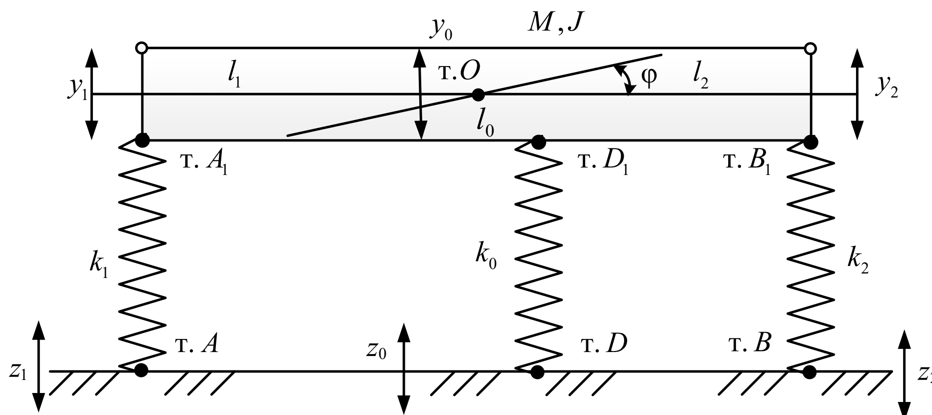


Рис. 3. Расчётная схема железнодорожного транспортного средства
при кинематическом возмущении (z_1, z_2, z_0)

Центр масс системы — точка O находится на расстояниях l_1 и l_2 от концов твёрдого тела (точек A_1, B_1). Элемент с жесткостью k_0 закреплён в точках D и D_1; расстояние OD_1 обозначено как l_0. Движение системы рассматривается в координатах y_1, y_2 и y_0, φ, связанных с неподвижным базисом. В расчётах используются соотношения:

$$y_0 = ay_1 + by_2,\ \phi = c(y_2 - y_1),\ y_1 = y_0 - l_1\phi,\ y_2 = y_0 + l_2\phi,$$
$$y_D = y_0 + l_1\phi,\ a = \frac{l_2}{l_1 + l_2},\ b = \frac{l_1}{l_1 + l_2},\ c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \tag{1}$$

Для вывода дифференциальных уравнений движения используется формализм Лагранжа [14], что требует построения выражений для кинетической и потенциальной энергий. В данном случае имеем:

$$T = \frac{1}{2}m\left(ay_1' + by_2'\right)^2 + Jc^2\left(y_2' - y_1'\right)^2, \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_0\left(y_D - z_0\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(y_2 - z_2\right)^2. \tag{3}$$

Учтём, что потенциальная энергия (3) может быть записана также в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(y_2 - z_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_0\left[ay_1 + by_2 + l_0c\left(y_2 - y_1\right) - z_0\right]^2 =$$
$$\frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(y_2 - z_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_0\left[a_1y_1 + b_1y_2 - z_0\right]^2, \tag{4}$$

где $a_1 = a - l_0c$, $b_1 = b + l_0c$.

Система уравнений движения в координатах y_1, y_2 во временной области примет вид:

$$y_1''\left(ma^2 + Jc^2\right) + y_1\left(k_1 + k_0a_1^2\right) - y_2''\left(Jc^2 - mab\right) + y_2k_0a_1b_1 = k_1z_1 + k_0a_1z_0, \tag{5}$$

$$y_2''\left(mb^2 + Jc^2\right) + y_2\left(k_2 + k_0b_1^2\right) - y_1''\left(Jc^2 - mab\right) + y_1k_0a_1b_1 = k_2z_2 + k_0b_1z_0. \tag{6}$$

После применения интегральных преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях [15] система уравнений (5), (6) может быть представлена в операторной форме:

$$\bar{y}_1\left[\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0a_1^2\right] - \bar{y}_2\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0a_1b_1\right] = k_1\bar{z}_1 + k_0a_1\bar{z}_0, \tag{7}$$

$$\bar{y}_2\left[\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0b_1^2\right] - \bar{y}_1\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0a_1b_1\right] = k_2\bar{z}_2 + k_0b_1\bar{z}_0, \tag{8}$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная ($j = \sqrt{-1}$), значок <–> над переменной означает её изображение по Лапласу [5].

На основе (7), (8) построена, в соответствии с положениями метода структурного математического моделирования [5], структурная математическая модель в виде структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системе автоматического управления (рис. 4).

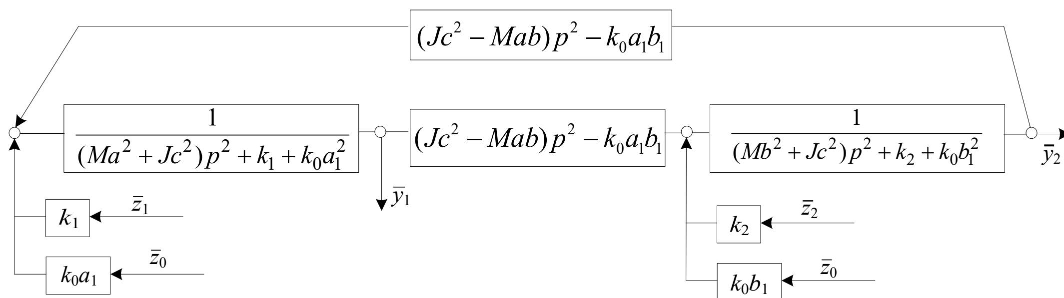


Рис. 4. Структурная математическая модель железнодорожного транспортного средства

Обсуждение и заключение. Особенности системы заключаются в том, что она имеет два парциальных блока, каждый из которых определяет соответствующие парциальные частоты:

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_0a_1^2}{ma^2 + Jc^2}, \tag{9}$$

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_0b_1^2}{mb^2 + Jc^2}, \tag{10}$$

которые, в свою очередь, определяют границы расположения частот собственных колебаний системы в целом:

$$\omega_{1\text{соб}}^2 < n_1^2 < n_2^2 < \omega_{2\text{соб}}^2, \tag{11}$$

где $\omega_{1\text{соб}}$, $\omega_{2\text{соб}}$ — частоты собственных колебаний системы, при работе на которых возможно возникновение резонансных режимов.

К числу особенностей системы относится наличие нескольких одновременно действующих внешних возмущений. Полагая в целях упрощения, чтоm $\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}_0$ (вполне допустимо на стадиях предварительных динамических оценок) примем, что на вход первого и второго парциальных блоков действуют силовые факторы:

$$\bar{Q}_1 = \bar{z}\left(k_1 + k_0 a_1\right), \quad (12)$$

$$\bar{Q}_2 = \bar{z}\left(k_2 + k_0 b_1\right). \quad (13)$$

Используя структурную схему на рис. 4, запишем выражения для передаточных функций, полагая, что между внешними факторами возмущения имеется связь, формируемая соотношением:

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}, \bar{Q}_2 = \alpha \bar{Q}, \quad (14)$$

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}} = \frac{\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left[\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2\right] + \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]}{A(p)}, \quad (15)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}} = \frac{\alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left[\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2\right] + \left(k_1 + k_0 a_1\right)\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]}{A(p)}, \quad (16)$$

где

$$A(p) = \left[\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2\right]\left[\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2\right] - \left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right], \quad (17)$$

является частотным характеристическим уравнением системы.

Числителем передаточных функций в выражениях (15), (16) определяют режимы динамического гашения колебаний, что может быть детализировано из уравнений, получаемых при «обнулении» числителей (15), (16):

$$\omega^2_{1\text{дин}} = \frac{\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left(k_2 + k_0 b_1^2\right) - \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)k_0 a_1 b_1}{\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left(mb^2 + Jc^2\right) + \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(Jc^2 - mab\right)}, \quad (18)$$

$$\omega^2_{2\text{дин}} = \frac{\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(k_1 + k_0 a_1^2\right) - \alpha\left(k_1 + k_0 a_1\right)k_0 a_1 b_1}{\alpha\left(k_1 k_2 + k_0 b_1\right)\left(ma^2 + Jc^2\right) + \left(k_1 k_2 + k_0 a_1\right)\left(Jc^2 - mab\right)}. \quad (19)$$

Из выражений (18), (19) следует, что в системе с двумя степенями свободы при наличии двух связанных между собой возмущающих факторов возможно возникновение режимов динамического гашения колебаний на двух частотах, параметры которых зависят от значений коэффициента связности α. Этот коэффициент может принимать отрицательные, положительные и нулевые значения.

Из анализа структурной математической модели (рис. 4) следует также и возможность возникновения особого динамического режима на частоте:

$$\omega^2_{\text{спец}} = \frac{k_0 a_1 b_1}{Jc^2 - mab}, \quad (20)$$

когда парциальные блоки получают возможность разъединения. В этом случае система (рис. 3) распадается на два автономных блока, которые не будут создавать ситуаций взаимодействия парциальных структур.

Реализация такого режима может привести к существенной разнице в значениях отклонений в точках A_1 и B_1 и «разбросу» значений динамических реакций в точках A_1, B_1 и D_1. Определение динамических реакций в точках A, B и D может быть реализовано по методике, изложенной в работе [14], в которой динамическая реакция определяется как произведение динамического смещения (например, точках A_1, B_1 и D_1) на значение приведённой динамической жёсткости.

Для координаты $\bar{y}_1$, динамическое смещение определяется из выражения для передаточной функции (15), а для координаты $\bar{y}_2$, из выражения (16). Для определения приведённой динамической жёсткости используется частотное характеристическое уравнение (17):

$$k_{\text{пр}1}(p) = k_1 + \frac{k_0 a^2 a_1}{\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2} - \frac{\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]^2}{\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2}. \quad (21)$$

Аналогично может быть найдено значение приведённой динамической жёсткости по координате $\bar{y}_2$

$$k_{\text{пр}2}(p) = k_2 + \frac{k_0 b^2 b_1}{\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2} - \frac{\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]^2}{\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2}. \quad (22)$$

Для определения конкретных значений $\bar{k}_{\text{пр}1}(p)$ $\bar{k}_{\text{пр}2}(p)$ необходимо найти значение частоты ω^2, которая определяется из условия, что $\bar{y}_2 / \bar{y}_1 = 1.$ В более общем случае предполагается, что:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \gamma, \tag{23}$$

где γ — коэффициент связности движения элементов по координатам $\bar{y}_2$ и $\bar{y}_1$. Таким образом этот коэффициент (для случая $\gamma = 1$) может быть записан в виде:

$$\gamma = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{\alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left[\left(ma^2 + Jc^2\right)p^2 + k_1 + k_0 a_1^2\right] + \left(k_1 + k_0 a_1\right)\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]}{\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left[\left(mb^2 + Jc^2\right)p^2 + k_2 + k_0 b_1^2\right] + \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left[\left(Jc^2 - mab\right)p^2 - k_0 a_1 b_1\right]}. \tag{24}$$

Принимая конкретные значения γ, можно найти частоты колебаний для движения рассматриваемого объекта в координатах $\bar{y}_2$ и $\bar{y}_1$. Например, при $\gamma = 1$ частота поступательных вертикальных колебаний твёрдого тела определится выражением:

$$\omega^2 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = \frac{\alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(k_1 + k_0 a_1^2\right) - \left(k_1 + k_0 a_1\right)k_0 a_1 b_1 + \left(k_1 + k_0 a_1\right)k_0 a_1 b_1 -}{\alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(ma^2 + Jc^2\right) + \left(k_1 + k_0 a_1\right)\left(Jc^2 - mab\right) -}\cdots$$
$$\cdots\frac{-\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left(k_2 + k_0 b_1^2\right) - \left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(k_1 + k_0 a_1^2\right) + \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)k_0 a_1 b_1}{-\left(k_1 + k_0 a_1\right)\left(mb^2 + Jc^2\right) - \alpha\left(k_2 + k_0 b_1\right)\left(Jc^2 - mab\right)}. \tag{25}$$

Частота ω синфазных гармонических возмущений $z_1(t)$, $z_2(t)$ и $z_0(t)$ обеспечивает движение твёрдого тела при $\varphi = 0$, то есть $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_D$. При других значениях γ ($\gamma \neq 1$) определяются $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, а на их основе из геометрических соображений определяется значение $\bar{y}_D$. Для твёрдого тела при известных $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ легко может быть найдено положение центра вращения (или колебаний) [12].

Динамические реакции связей $\bar{R}_{A1}, \bar{R}_{B1}$ и $\bar{R}_{D1}$ могут быть в первом приближении найдены по формулам:

$$\bar{R}_{A1} = k_1 \bar{y}_1,\ \bar{R}_{B1} = k_2 \bar{y}_2,\ \bar{R}_{D1} = k_0 \bar{y}_D.$$

В общем случае динамические реакции определяются с использованием динамических смещений $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_D$, определяемых выражениями (15), (16). Что касается динамического смещения в точке D, то используется выражение $\bar{y}_D = a_1 \bar{y}_1 + b_1 \bar{y}_2$, параметры которого определяются вышеприведёнными значениями. В выражения (15), (16) могут быть введены данные о связности силовых факторов воздействия (параметр α). Для получения конкретных данных о значениях динамических реакций вводятся параметры частоты, при которой реализуется соотношение амплитуд колебаний $\bar{y}_2$ и $\bar{y}_1$ через коэффициент связности амплитуд колебаний γ.

Полная реакция связей в точках A, B и D определяется суммой двух компонент: статической и динамической. Статическая компонента может быть найдена из выражения для передаточных функций динамических реакций при $p = 0$ и задании параметров статической нагрузки (вес вагона и перевозимого груза). При интенсивном развитии колебательных процессов, когда возрастают колебания по координатам $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_D$, полная реакция может изменяться в значительных пределах и отличаться от статической реакции связей. При наличии динамической компоненты полная реакция может принимать различные значения, в частности, нулевые или отрицательные.

Сформированная в рамках предложенного метода математическая модель, обозначенная выражением (25), позволяет оценивать динамическое состояние железнодорожных транспортных средств при введении дополнительных связей в их структуру для формирования комплекса рекомендаций по получению устойчивых режимов их эксплуатации. Изучение особенностей системы при помощи подходов, характерных для структурного математического моделирования, позволяет детализировано рассмотреть связи между элементами. Применительно к рассматриваемому техническому объекту это даёт возможность корректировки динамического состояния технического объекта на основе варьирования параметров совокупности дополнительно введённых элементов и позволяет уменьшить нагрузку на основные части подвески, а также установить наличие в системе собственных частот и частот динамического гашения колебаний.

В дальнейшем планируется проведение исследований при введении в структуру транспортного средства демпферов и устройств преобразования движения для оценки возможностей структурного математического моделирования. Также интересным направлением является оценка возможностей изменения динамических реакций в зависимости от внешнего воздействия, что позволит оценить усилия, прилагаемые к различным элементами подвески транспортного средства.

Список литературы / References

1. Коссов В.С., Князев Д.А., Красюков Н.Ф., Махутов Н.А., Гаденин М.М. Нормативная база обеспечения безопасной эксплуатации железнодорожной техники по ресурсу несущих конструкций. *Мир транспорта*. 2023;21(3):106–114. https://doi.org/10.30932/1992-3252-2023-21-3-10

Kossov VS, Knyazev DA, Krasyukov NF, Makhutov NA, Gadenin MM. Regulatory Framework for Ensuring the Safe Operation of Railway Equipment Based on the Service Life of Load-Bearing Structures. *World of Transport and Transportation*. 2023;21(3):254–262. https://doi.org/10.30932/1992-3252-2023-21-3-10

2. Махутов Н.А., Лапидус Б.М., Гаденин М.М., Титов Е.Ю. Задачи и перспективы развития научных исследований в рамках сотрудничества между ОАО «РЖД» и Российской академией наук. *Железнодорожный транспорт*. 2023;(7):6.

Makhutov NA, Lapidus BM, Gadenin MM, Titov EYu. Tasks and Prospects for the Development of Scientific Research within the Framework of Cooperation between JSC “Russian Railways” and the Russian Academy of Sciences. *Zheleznodorozhnyi transport*. 2023;(7):6–11. (In Russ.).

3. Лапидус Б.М. Задачи опережающего развития российских железных дорог. *Железнодорожный транспорт*. 2023;(2):4–14.

Lapidus BM. Tasks of Advanced Development of Russian Railways. *Zheleznodorozhnyi transport*. 2023;(2):4–14. (In Russ.).

4. Колесников В.И., Мигаль Ю.Ф., Колесников И.В., Сычев А.П., Воропаев А.И. Повышение износостойкости тяжелонагруженных трибосистем путем формирования структуры и свойств их контактных поверхностей. *Наука Юга России*. 2022;18(4):59–65. https://www.doi.org/10.7868/S25000640220407

Kolesnikov VI, Migal YuF, Kolesnikov IV, Sitrev AP, Voropaev AP. Increasing the Wear Resistance of Heavily Loaded Tribosystems by Forming the Structure and Properties of Their Contact Surfaces. *Nauka Yuga Rossii (Science in the South Russia)*. 2022;18(4):59–65. https://www.doi.org/10.7868/S25000640220407 (In Russ.).

5. Елисеев С.В., Елисеев А.В., Большаков Р.С., Хоменко А.П. *Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин*. Москва: «Наука»»; 2021. 679 с.

Eliseev SV, Eliseev AV, Bolshakov RS, Khomenko AP. *Methodology of System Analysis in Problems of Assessment, Formation and Control of the Dynamic State of Technological and Transport Machines*. Moscow: “Nauka”; 2021. 679 p. (In Russ.).

6. Ромен Ю.С, Белгородцева Т.М, Дедяев М.В. Состояние ходовых частей вагона и силы взаимодействия в системе «экипаж – путь». *Транспорт Российской Федерации*. 2021;95(4):36–40. URL: https://rostransport.elpub.ru/jour/article/view/127/127 (дата обращения: 19.02.2024).

Romen YuS, Belgorodtseva TM, Dediaev MV. Condition of Wagon Wheels and Axles and Interaction Forces in the “Crew – Track” System. *Transport of Russian Federation*. 2021;95(4):36–40. https://rostransport.elpub.ru/jour/article/view/127/127 (accessed: 19.02.2024).

7. Савоськин А.Н., Ромен Ю.С., Акашев М.Г. Определение вероятностных характеристик боковых сил между колесом и рельсом как полезного случайного процесса на фоне помех. *Вестник машиностроения*. 2022;(4):14–19. URL: https://www.mashin.ru/eshop/journals/vestnik_mashinostroeniya/2031/19/ (дата обращения: 19.02.2024).

Savoskin AN, Romen YuS, Akashev MG. A Useful Random Process of Acting Lateral Forces between a Wheel and Rail and Its Probabilistic Characteristics. *Vestnik Mashinostroeniya*. 2022;(4):14–19. URL: https://www.mashin.ru/eshop/journals/vestnik_mashinostroeniya/2031/19/ (accessed: 19.02.2024).

8. Ермоленко И.Ю., Морозов Д.В., Асташков Н.П. Влияние продольных нагрузок на безопасность движения при эксплуатации на горно-перевальных участках пути. *Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения*. 2021;82(2):104–111. https://doi.org/10.46973/0201-727X_2021_2_104

Ermolenko IYu, Morozov DV, Astashkov NP. Influence of Longitudinal Loads on Traffic Safety When Operating on Mountain Passway Sections. *Vestnik RGUPS, Rostov State Transport University*. 2021;82(2):104–111. https://doi.org/10.46973/0201-727X_2021_2_104

9. Булдаев А.С., Хишектуева И.Х.Д., Анахин В.Д., Дамбаев Ж.Г. Об одном методе решения задачи идентификации динамических систем. *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*. 2020;(4):14–25. https://doi.org/10.18101/2304-5728-2020-4-14-25

Buldaev AS, Khishektueva IKhD, Anakhin VD, Dambaev ZhG. On One Method for Solving the Problem of Identifying Dynamic Systems. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*. 2020;(4):14–25. https://doi.org/10.18101/2304-5728-2020-4-14-25

10. Булдаев А.С. Проекционные методы возмущений в задачах оптимизации управляемых систем. *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. 2014;8:29–43. URL: https://mathizv.isu.ru/ru/journal?id=7 (дата обращения: 19.02.2024).

Buldaev AS. Projection Perturbation Methods in Optimization Problems of Controlled Systems. *Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2014;8:29–43. URL: https://mathizv.isu.ru/en/journal?id=7 (accessed: 19.02.2024).

11. Мижидон А.Д., Хамханов А.К. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая твердое тело, прикрепленное к двум упругим стержням. *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*. 2022;(4):38–47. https://doi.org/10.18101/2304-5728-2022-4-38-47

Mizhidon AD, Khamkhanov AK. A Hybrid System of Differential Equations Describing a Rigid Body Attached to Two Elastic Rods. *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Informatics*. 2022;(4):38–47. https://doi.org/10.18101/2304-5728-2022-4-38-47

12. Елисеев А.В., Миронов А.С., Елисеев С.В. Формирование математических моделей вибрационных взаимодействий элементов технических средств транспортного и технологического назначения. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2022;(1):32–42. https://doi.org/10.17308/sait.2022.1/9199

Eliseev AV, Mironov AS, Eliseev SV. Formation of Mathematical Models of Vibration Interactions of Elements of Technical Means of Transport and Technological Purposes. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*. 2022;(1):32–42. https://doi.org/10.17308/sait.2022.1/9199

13. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К., Елисеев С.В. Новые подходы в оценке динамических свойств колебательных структур: частотные функции и связность движений. *Труды МАИ*. 2021;(120):08. https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08

Eliseev AV, Kuznetsov NK, Eliseev SV. New Approaches to the Estimation of Dynamic Properties of Vibrational Structures: Frequency Functions and Connectivity of Movements. *Trudy MAI*. 2021;(120):08. https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-08

14. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Концепция обобщенного рычага в оценке динамических состояний механических колебательных систем в условиях связных вибрационных нагружений. *Системы. Методы. Технологии*. 2023;59(3):7–12. https://doi.org/10.18324/2077-5415-2023-3-7-12

Eliseev AV, Kuznetsov NK. The Concept of a Generalized Lever in Assessing the Dynamic States of Mechanical Oscillatory Systems under Conditions of Connected Vibration Loads. *Systems. Methods. Technologies*. 2023;59(3):7–12. https://doi.org/10.18324/2077-5415-2023-3-7-12

15. Кашуба В.Б., Большаков Р.С., Мозалевская А.К., Нгуен Д.Х. Определение реакций связей между элементами виброзащитных систем на основе метода структурных преобразований. В: *Материалы XV Всероссийской научно-технической конференции с международным участием «Механики XXI веку»*. Братск: Братский государственный университет; 2016. С. 295–300.

Kashuba VB, Bolshakov RS, Mozalevskaya AK, Nguyen Huynh Duc. Identification of Ties Responses between Vibroprotection Systems Elements on Base of Structural Transformation Method. In: *Proc. XV All-Russian Sci.-Tech. Conference with International Participation "Mechanical Engineers to XXI Century"*. Bratsk: BrSU; 2016. P. 295–300.

Об авторах:

Роман Сергеевич Большаков, кандидат технических наук, доцент кафедры управления эксплуатационной работой Иркутского государственного университета путей сообщения (664074, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15), SPIN-код: 2025–4049, ORCID, ScopusID, bolshakov_rs@mail.ru

Валерий Ерофеевич Гозбенко, доктор технических наук, профессор кафедры математики Иркутского государственного университета путей сообщения (664074, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15), SPIN-код: 4307–8922, ORCID, ScopusID, vgozbenko@yandex.ru

Выонг Куанг Чык, соискатель кафедры физики, механики и приборостроения Иркутского государственного университета путей сообщения (664074, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15), SPIN-код: 6214–3569, ORCID, ScopusID, trucvq1990@gmail.com

About the Authors:

Roman S. Bolshakov, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Operational Work Management Department, Irkutsk State Transport University (15, Chernyshevskogo Str., Irkutsk, 664074, Russian Federation), SPIN-code: 6214–3569, ORCID, ScopusID, bolshakov_rs@mail.ru

Valery E. Gozbenko, Dr.Sci. (Eng.), Professor of the Mathematics Department, Irkutsk State Transport University (15, Chernyshevskogo Str., Irkutsk, 664074, Russian Federation), SPIN-code: 4307–8922, ORCID, ScopusID, vgozbenko@yandex.ru

Vuong Quang Truc, postgraduate of the Department of Physics, Mechanics and Instrumentation, Irkutsk State Transport University (15, Chernyshevskogo St., Irkutsk, 664074, Russian Federation), SPIN-code: 6214–3569, ORCID, ScopusID, trucvq1990@gmail.com

Заявленный вклад авторов:

Р.С. Большаков: формирование цели исследования, построение системы уравнений и структурных схем, анализ результатов исследования, формулирование заключения.

В.Е. Гозбенко: корректировка цели исследования, доработка текста, корректировка заключения.

Выонг Куанг Чык: проведение расчетов, создание графических изображений, анализ и дополнение текста.

Claimed Contributorship:

RS Bolshakov: research objective formulation, building a system of equations and block diagrams, analysis of the research results, formulation of the conclusion.

EV Gozbenko: correction of the research objective, revision of the text, correction of the conclusion.

Vuong Quang Truc: calculation analysis, creation of graphic images, text analysis and addition.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

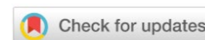
Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 15.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 10.04.2024
Принята к публикации / Accepted 16.04.2024

МЕХАНИКА
MECHANICS





UDC 622.692.4 *Original Theoretical Research*
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-135-147

Analysis of the Drag-Reduction Ability of the Layout and Cross-Sectional Shapes of Subsea Structures in the Critical Flow Mode



EDN: TDJYXD

Henry F. Annapeh, **Victoria A. Kurushina** ✉
Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation
✉ v.kurushina@outlook.com

Abstract
Introduction. Slender structures of subsea energy production systems are under constant influence of currents and waves. Hydrodynamic loads result from the interaction of subsea pipelines, umbilicals, equipment supports with fluid flows, and lead to the vortex formation in the area behind the structures. Vortex-induced forces are the sources of the cyclic loading. They accelerate gradually the fatigue damage, which may result in a failure. One of the ways to reduce the loads on subsea structures is to alter the shape of a cross-section, taking into account the flow regime. Dependence of the resulting hydrodynamic loads on the cross-sectional shape and relative position of structures has not been studied in details for the uniform flow in the critical mode. The current work is aimed at filling this gap. The research objective is to consider the impact of the distance between the structures, and also, the presence of a D-shaped structure, placed upstream relative to the group of three cylinders of different cross-sectional shapes.
Materials and Methods. The computational fluid dynamics approach was used in this work for numerical simulations of vortex-induced forces in the ANSYS Fluent software for cylinder with D = 0.3 m. Modelling was conducted with the Detached Eddy Simulation (DES) method, which combined advantages of the Reynolds-averaged Navier-Stokes equation (RANS) method and the Large Eddy Simulation (LES) method. The object of the research was the system of four structures in the 2D computational domain, which included the upstream D-shaped cylinder and the main group of three cylinders with the circular, squared and diamond shapes of the cross-section. The transient process was considered, where structures were under the influence of the uniform flow in the critical regime at $Re = 2.5 \times 10^5$.
Results. Five sets of data were obtained in simulations for the time-dependent coefficients of the lift and drag forces: for the main system — of the D-shaped, circular, square and diamond structures, and also for the four systems — of only D-shaped, only circular, only square and only diamond shaped structures. Additional analysis was conducted for the effect of the distance between the structures on the amplitude of fluctuating hydrodynamic force coefficients. The obtained results are presented as time histories of coefficients of the lift and drag forces, frequency analysis and contours of velocity, pressure and vorticity fields. The results indicate a positive effect of the upstream D-shaped structure on reducing the drag force, acting on the central structure in the group of three cylinders located downstream.
Discussion and Conclusion. The results of the performed studies facilitate the informed decisions regarding the arrangement of subsea structures in a group of four objects, depending on the cross-sectional shape and the distance between the structures. The upstream D-shaped structure provides reducing the hydrodynamic drag force acting on the central structure in the downstream group of three structures, thereby slowing the fatigue accumulation and increasing the time of safe operation.

Keywords: vortex-induced forces, drag coefficient, lift coefficient, uniform flow

Acknowledgements. The authors would like to thank Dr. A. Postnikov for the discussion on simulation of the flow over cylinder. The authors also thank the Editorial Board of the Journal and the anonymous reviewers for the constructive comments, which helped improving the paper.

Funding Information. The research is done with the financial support of the National Project "Science and Universities" from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant no. FEWN–2021–0012).

For Citation. Annapeh HF, Kurushina VA. Analysis of the Drag-Reduction Ability of the Layout and Cross-Sectional Shapes of Subsea Structures in the Critical Flow Mode. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):135–147. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-135-147

Оригинальное теоретическое исследование

Анализ возможности снижения лобового сопротивления за счёт расположения и поперечных сечений подводных конструкций в потоке критического режима

Г.Ф. Аннапе, **В.А. Курушина** ✉

✉ v.kurushina@outlook.com

Аннотация

Введение. Длинные и узкие в поперечнике конструкции морских энергодобывающих систем находятся под постоянным воздействием течений и волн. Гидродинамические нагрузки являются результатом взаимодействия подводных трубопроводов, шлангокабелей, опор оборудования с потоком жидкости и приводят к образованию вихрей в зоне за конструкциями. Вихреобразовательные силы служат источником циклического нагружения и постепенно ускоряют усталостное разрушение, что может привести к авариям. Одним из способов снижения нагрузок на подводные конструкции является изменение формы их поперечного сечения с учетом режима потока. Недостаточно изучено, каким образом итоговые гидродинамические нагрузки зависят от формы поперечного сечения и взаимного расположения названных выше элементов систем, находящихся в равномерном критическом потоке. Представленная научная работа призвана восполнить этот пробел. Цель исследования — рассмотреть в данном контексте значение расстояния между конструкциями, а также наличие полукруглой D-образной конструкции, размещённой перед группой из трёх цилиндров с разными поперечными сечениями.

Материалы и методы. Для численного моделирования вихреобразовательных сил использовался метод вычислительной динамики флюидов в программе ANSYS Fluent для цилиндров диаметром D = 0,3 м. Моделирование выполнено методом неприсоединённых вихрей DES, который сочетает в себе преимущества метода усреднённого по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса RANS и метода крупных вихрей LES. В качестве объекта исследования рассматривалась система, состоящая из четырёх конструкций в вычислительном домене в 2D, включая стоящий выше по течению полукруглый цилиндр и основную группу из трёх цилиндров круглой, квадратной и ромбовидной формы поперечного сечения. Эти конструкции в условиях неустановившегося процесса находятся под действием равномерного потока критического режима при $Re = 2{,}5 \times 10^5$.

Результаты исследования. В результате моделирования получены пять наборов данных для изменяющихся во времени коэффициентов вихреобразовательных подъёмной силы и силы сопротивления: для основной системы из полукруглой, круглой, квадратной и ромбовидной конструкции, а также для четырёх систем из только полукруглых, только круглых, только квадратных и только ромбовидных конструкций. Дополнительно проведён анализ влияния расстояния между конструкциями на амплитуду колебаний коэффициентов гидродинамических сил. Полученные результаты представлены в виде коэффициентов подъёмной силы и силы сопротивления в динамике, анализа частот и контуров полей скорости, давления, завихрённости. Результаты позволяют установить положительное влияние стоящей выше по течению полукруглой конструкции на снижение силы сопротивления на центральную конструкцию в группе из трёх цилиндров ниже по течению.

Обсуждение и заключение. Результаты проведённых исследований позволяют принимать обоснованные решения для расстановки морских конструкций в группе из четырёх объектов в зависимости от формы поперечного сечения и расстояния между ними. Установка полукруглой конструкции выше по течению позволяет снизить гидродинамическую силу сопротивления на центральную конструкцию в группе из трёх конструкций ниже по течению, что замедляет её усталостное разрушение и увеличивает срок эксплуатации.

Ключевые слова: вихреобразовательные силы, коэффициент лобового сопротивления, коэффициент подъемной силы, равномерный поток

Благодарности. Авторы выражают признательность доктору А. Постникову за обсуждение по моделированию потока вокруг цилиндра. Авторы также благодарят редакционную коллегию журнала и анонимных рецензентов за конструктивные замечания, позволившие улучшить статью.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Национального проекта «Наука и университеты» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант номер FEWN–2021–0012).

Для цитирования. Аннапе Г.Ф., Курушина В.А. Анализ влияния расположения конструкций и поперечных сечений на снижение лобового сопротивления в условиях критического потока. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):135–147. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-135-147

Introduction. Operation and construction of modern offshore systems, specializing on the energy production, extraction of resources or carbon capture and storage, require evaluation of the impact of environmental flows on equipment and structures. An increased fatigue failure in subsea structures, such as pipelines, risers, cables, piles, equipment supports, may come from the vortex shedding phenomenon. The problem is particularly important when slender structures are designed to reach deep waters to connect subsystems together. The layout of subsea systems comes with the arrangement of structures with different geometry, hydrodynamic properties, and their position in proximity to each other. The interference of wakes from these structures and vortex formation patterns is sometimes challenging to predict at very high Reynolds numbers due to the turbulent nature of the flow.

Differences in the flow over a standalone cylinder and two cylinders in tandem are discussed in [1], and three vortex shedding regimes are identified for tandem structures. These vortex formation modes include the extended-body regime at $1.0 < L/D < 1.8$, where L/D is spacing ratio, commonly used to quantify the distance between centres of neighbour structures. So that, L corresponds to the distance, and D is the diameter of the structure. In [1], increase of the spacing ratio to $1.8 < L/D < 3.8$ leads to the reattachment regime, where shear layers detach from the upstream structure and reattach to the front side of the downstream structure, so that vortices are formed behind this downstream object. Further growth of the spacing ratio, above $L/D > 3.8$, introduces the co-shedding regime, where a separate vortex is formed from the upstream structure and from the downstream structure. Another fundamental research investigated vortex dynamics in details through experimental research [2]. One of the following fundamental studies [3] experimentally investigated the vortex shedding frequencies of two staggered identical circular cylinders with the Reynolds number Re varying from 3.2×10^4 to 7.4×10^4, and two fixed side-by-side cylinders at the Reynolds number of 2.5×10^4 were earlier considered in [4]. These investigations provide an important foundation for modern studies in terms of the known effects in fluid forcing and vortex shedding patterns.

Significantly more recent investigations are performed numerically [5] to study the effect of spacing on loads and vibrations for two tandem cylinders at subcritical Reynolds numbers, and for specific cases, like a group of mixed large and smaller structures [6]. The latter work [6] numerically investigates fluid force coefficients and observes the vortex formation pattern on three identical rigid circular cylinders in proximity to a square cylinder. A parametric study is conducted in [7] for three identical stationary circular and D-shaped cylinders placed close to a square cylinder at Reynolds number 3900 in both linearly and parabolic sheared flows.

Considering the impact of cross-sectional shapes further, a numerical study is conducted by [8] for a flow over six identical stationary cylinders having different cross-sectional shapes at Reynolds number of 2.5×10^5 in the uniform and linearly sheared flow. Rectangular cylinders are investigated in details in [9, 10, 11], where one of the most impactful factors for hydrodynamic loads is the aspect ratio of rectangle sides. The works [9, 10] provide new experimental data and attempt to develop semi-empirical methods of predicting the response of structures. Further steps in improving the modelling approaches for the structural vibration of rectangle-shaped objects under the hydrodynamic excitation are performed in [11]. Another branch of studies considers a flow over a sphere [12, 13, 14], while still leaving issues of the impact of the cross-sectional shape of subsea structures open.

Further research on diverse cross-sectional shapes is performed in [15, 16, 17], where triangular and diamond cross-sections are studied in comparison. Research [15] is focused on the sensitivity to the corner sharpness for the diamond (rhomb) cross-section. Work [16] investigates effects from diverse cross-sections for the system with a rotational degree of freedom, when subjected to flow-induced vibration, and study [17] uses cross-sectional shapes for the energy harvesting with fluid-structure interaction.

Following published results, the current work aims to investigate the drag reduction when three structures of different cross-sectional shapes are located around a circular cylinder to observe the wake interference and the vortex formation pattern between these structures for the spacing ratio L/D varying from 1.67 to 2.83 in the uniform flow at the Reynolds number of 2.5×10^5 with the computational fluid dynamics approach. Specifically, the drag reducing ability of the upstream structure is of the research interest. The considered layout is a combination of cylinders placed in tandem, side-by-side and staggered position, with a mixture of cross-sectional shapes.

Materials and Methods. A system of four cylinders with a diameter (characteristic size) of 0.3 m with different cross-sectional types is considered in this study. The selected cross-sectional shapes and positions of structures are shown in Figure 1. Fluid forces and the flow interference are studied for the spacing ratio of L/D varying from 1.67 to 2.83 in the uniform current at the Reynolds number of 2.5×10^5 and the corresponding velocity of 0.837 m/s. The study focuses on the specific layout, where structures are positioned relative to each other in a mixed tandem (cylinders 1 and 3), side-by-side (cylinders 2 and 3, and cylinders 3 and 4) and staggered (cylinders 1 and 2, and cylinders 1 and 4) configuration. Cross-sectional shapes considered include half-circle, square, circle, and diamond.

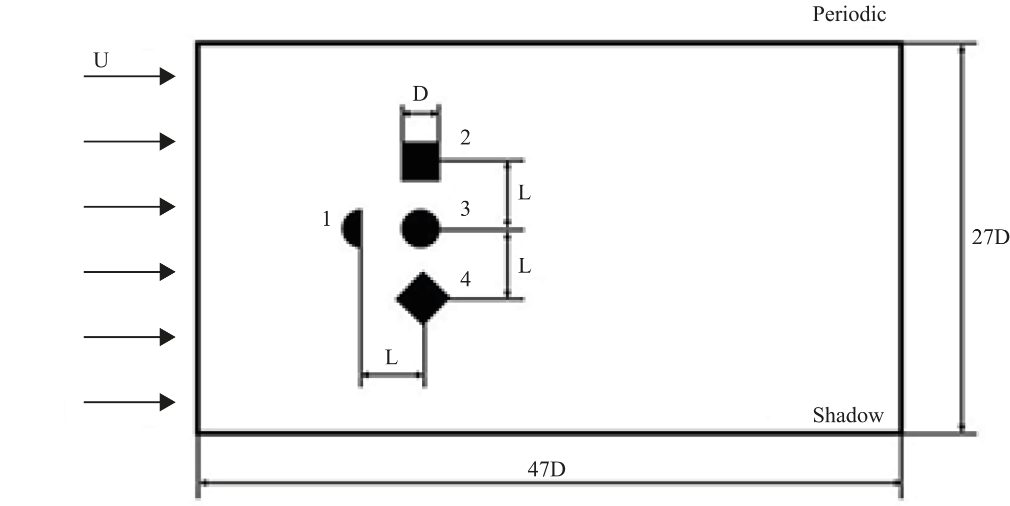


Fig. 1. Considered structures in the computational fluid domain

Computational fluid dynamic simulations are performed in the domain with a size of 47D x 27D. The top and bottom boundaries are located at a distance of 13.5D away from the center of the circular cylinder, periodic and shadow properties are assigned to these boundaries. The left boundary serves as a velocity-inlet, which is located at the distance of 20D from the centre of the circular structure 3 in the domain. The value of gauge pressure is set to zero at the pressure-outlet set at the right boundary. No-slip conditions are applied to the cylinders.

The flow around cylinders is simulated using the computational fluid dynamics software ANSYS Fluent, where the finite volume method is implemented to solve the Navier-Stokes system. The incompressible flow is considered, and the 2D DES transient simulations are conducted with the *k*–ω SST turbulence model. Time integration is performed using the second-order implicit transient formulation with a time step of 0.01 s, and the PISO algorithm is used as the solver.

The DES approach connects capabilities of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) and Large Eddy Simulation (LES) methods [8]. The RANS governing equations for the incompressible flow are as follows:

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u_i}\right)}{\partial x_i}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u_i}\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\overline{u_i\,u_j}+\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}\right)=\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}, \tag{2}$$

where p is mean pressure, $\overline{u_i}$ is average Cartesian components of the velocity vector, $\rho\overline{u_i^{'}u_j^{'}}$ are Reynolds stresses, ρ is density of the fluid and $\overline{\tau_{ij}}$ is mean viscous stress vector components, which could be expressed as:

$$\partial\overline{\tau_{ij}}=\mu\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right), \tag{3}$$

where μ is dynamic viscosity.

The Large Eddy Simulation (LES) system of equations for the incompressible flow can be written in the following way:

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\,u_j\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{u_i}}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial\overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j}, \tag{5}$$

where $\overline{u_i}$ and $\overline{\rho}$ represent the resolved filtered velocity and pressure, respectively.

The diffusion term of the DES model is given by

$$Y_k=\rho\beta^{*}k\omega F_{DES}, \tag{6}$$

where β^* is a constant, *k* stands for fluctuation of the turbulent kinetic energy, ω is specific energy dissipation rate, and F_{DES} is as follows:

$$F_{DES}=max\left(\frac{L_t}{C_{des}\Delta_{max}},1\right), \tag{7}$$

where C_{des} is a constant, Δ_{max} is local maximum grid map $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)^{1/3}$. Further, L_t is turbulent length scale:

$$L_t = \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega}. \quad (8)$$

The DES-SST model uses the following zonal formulation:

$$F_{DES} = max\left(\frac{L_t}{C_{des}\Delta_{max}}\left(1 - F_{SST}\right), 1\right), \quad (9)$$

where $F_{SST} = 0$, F_1, F_2, and F_1, F_2 are mixed functions of the SST model.

Table 1 below provides results of the mesh independence test for the uniform flow of Re = 2.5×10^5. The mesh settings are adopted from [7], and the accuracy of the grid is demonstrated by comparisons in Table 1. All subsequent analysis in this paper is performed with Mesh 2, and the results include signals and frequencies of the fluid force coefficients and an indication of the vortex shedding pattern. The drag force fluctuations are presented in this work in terms of the drag force coefficient C_D which comprises the mean drag coefficient C_{D0} and the fluctuating drag coefficient C_D^{fl}, as follows:

$$C_D = C_{D0} + C_D^{fl}. \quad (10)$$

The lift force fluctuations are presented using the lift coefficient C_L.

Table 1

Mesh independence test results

Cases	C_{D0}	Number of cells	Strouhal number
Re = 2.5×10^5			
Current study			
Mesh 1	0.98	63,345	0.24
Mesh 2	1.08	86,478	0.24
Mesh 3	1.08	131,041	0.24
Published data			
Lehmkuhl, et al. (2014) (LES) [18]	0.833	–	0.238
Achenbach&Heinecke (1981) (Experiment) [19]	1.135	–	0.230
Re = 3,900			
Current study, Mesh 2	0.93	86,478	0.18
Wornom, et al. (2011) (VMS-LES) [20]	0.99	–	–
Re = 3.6×10^6			
Current study, Mesh 2	0.4100	86,478	–
Porteous, et al. (2015) (URANS) [21]	0.4206	–	–
Nazvanova, et al. (2022) (URANS) [22]	0.4657	74,496	–

Results. In this study, simulations are performed in two series. The first series is focused on recognising the overall effect of various cross-sectional shapes, placed at L/D = 2.00 from each other. Cylinder numbers here correspond to the ones used in Figure 1, according to the cylinders position. The calculation results for this set are reported in Table 2, in comparison to the case of structures with mixed cross-sections. The second series provides an insight into the impact of L/D ratio on hydrodynamic loads observed for the mixed cross-section case only, as in Figure 1. These results are summarised in Table 3 and allow defining the drag reducing effect of the D-shape upstream structure on loads when cross-sections are different.

Table 2

Simulation results for the same arrangement with different cross-sectional shapes for L/D = 2.00

L/D = 2.0	Basic case of structures with alternate cross-sections in Fig. 1	All circular structures	All square structures	All D-shaped structures	All diamond-shaped structures
Cylinder 1					
C_{D0}	0.45	0.28	0.49	0.48	0.46
C_D^{fl}	0.19	0.14	0.43	0.28	0.17
C_L	0.18	0.04	0.07	0.13	0.28
Cylinder 2					
C_{D0}	0.87	0.39	0.89	0.64	0.70
C_D^{fl}	1.03	0.38	1.38	0.49	0.60
C_L	1.38	0.53	0.07	0.11	0.07
Cylinder 3					
C_{D0}	0.3	0.24	0.26	0.35	0.70
C_D^{fl}	0.45	0.37	0.91	0.68	0.63
C_L	1.03	0.73	1.26	0.30	0.73
Cylinder 4					
C_{D0}	0.98	0.39	0.83	0.61	0.99
C_D^{fl}	0.90	0.27	0.96	0.44	1.05
C_L	1.22	0.81	1.63	0.37	1.11

Table 3

Simulation results for the mixed cross-sections at various L/D ratio

L/D	Cylinder 1			Cylinder 2			Cylinder 3			Cylinder 4		
	C_{D0}	C_D^{fl}	C_L	C_{D0}	C_D^{fl}	C_L	C_{D0}	C_D^{fl}	C_L	C_{D0}	C_D^{fl}	C_L
1.67	0.14	0.18	0.15	0.98	1.17	1.44	0.48	0.57	0.66	0.93	0.75	1.13
1.83	0.33	0.21	0.18	0.93	1.54	1.40	0.33	0.50	0.86	1.01	1.36	1.15
2.00	0.45	0.19	0.18	0.87	1.03	1.38	0.30	0.45	1.03	0.98	0.90	1.22
2.17	0.49	0.05	0.19	0.81	0.14	1.11	0.25	0.06	0.83	0.96	0.38	1.10
2.33	0.37	0.12	0.00	0.78	0.34	1.03	0.25	0.06	0.28	1.00	0.07	0.79
2.50	0.57	0.16	0.20	0.76	0.89	1.18	0.26	0.47	0.77	1.01	0.64	1.06
2.67	0.57	0.02	0.27	0.78	0.16	1.37	0.28	0.08	0.82	1.02	0.03	0.96
2.83	0.58	0.21	0.21	0.84	0.91	1.70	0.20	0.52	1.16	0.93	0.68	1.03

Comparison of all circular, all square, mixed (as in Fig. 1), all diamond and all D-shapes with each other in Table 2 reveals relatively lower hydrodynamic loads for all four structures observed for the circular shapes at the L/D = 2.00. The largest mean drag coefficient here is experienced by the fourth structure in both mixed-shaped and all diamond-shaped arrangement. The highest maximum fluctuating drag coefficient of 1.38 is observed for cylinder 2 in the all square-shaped arrangement. The largest maximum amplitude of the lift coefficient of 1.63 also belongs to the all square-shaped arrangement, but corresponds to cylinder 4. Mixed-shaped arrangement (or basic case of structures with alternate cross-sections, as in Fig. 1) at L/D = 2.00 demonstrates a relative consistency in large amplitudes of the lift coefficient for cylinders 2, 3, 4, which makes estimations of hydrodynamic loads for this arrangement more important, due to higher expected loads.

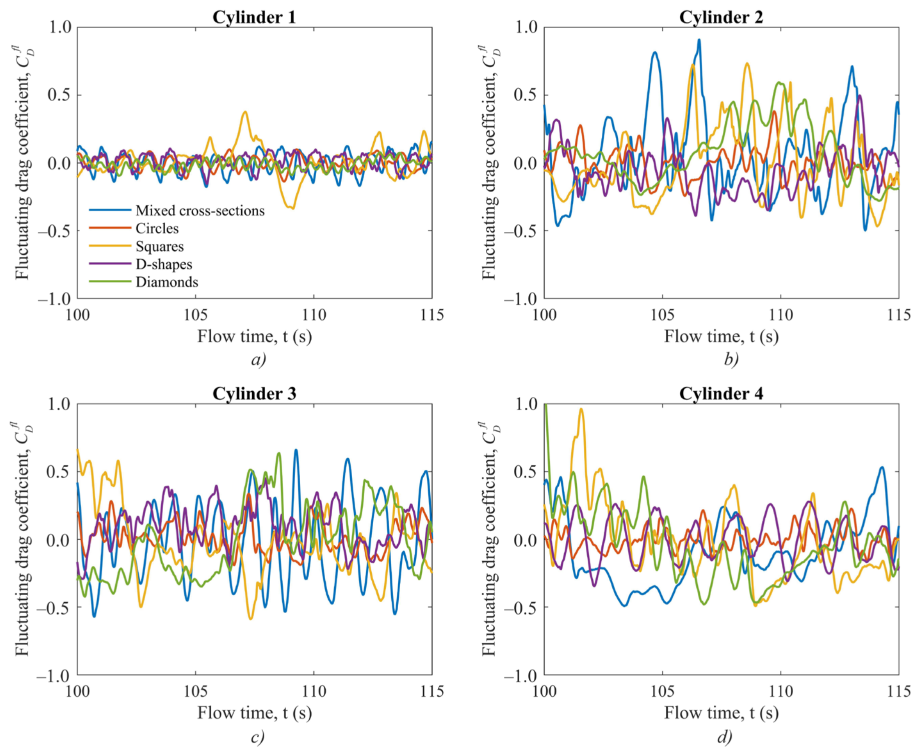


Fig. 2. Time histories of fluctuating drag coefficients for four cylinders of a different cross-sectional shape with L/D = 2.0: *a* — cylinder 1; *b* — cylinder 2; *c* — cylinder 3; *d* — cylinder 4

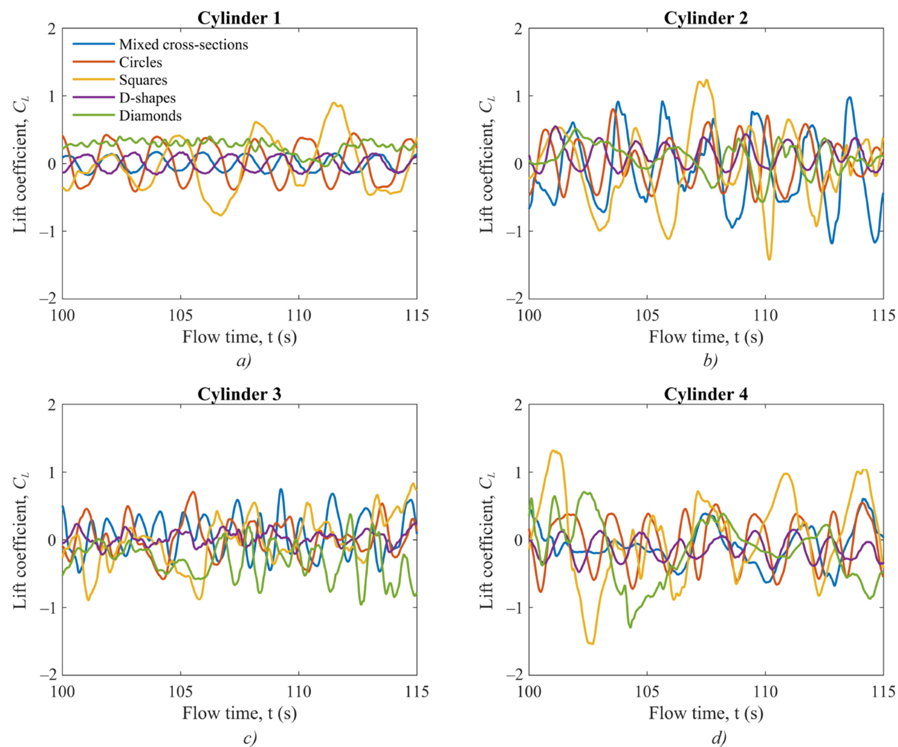


Fig. 3. Time histories of lift coefficients for four cylinders of a different cross-sectional shape with L/D = 2.0: *a* — cylinder 1; *b* — cylinder 2; *c* — cylinder 3; *d* — cylinder 4

Further observation of signals of the fluctuating drag and lift coefficient in Figures 2 and 3 reveals meaningful instabilities in forces experienced by all structures with square shapes, and for structures 2, 3, 4 with diamond and mixed shapes. The comparison shows that circular and D-shaped structures would experience lower and more stable fluid loads in this arrangement. Table 2 and Figures 2 and 3 confirm that cylinder 1 in the shape of a circle or D-shape provides reducing fluid loads for the three downstream cylinders. This substantiates the common interest in further exploration of the effect of the D-shaped structure on reducing the drag force in the arrangement with all alternative cross-sectional shapes.

This effect is studied in details in the next (second) simulation series, presented for each cylinder in Figures 4–7 in terms of the fluid forces and in Figures 8, 9 — in terms of the fluid flow characteristics for the considered computational domain. Figure 4 illustrates fluid loads on the upstream structure, where the most unstable signal (at *L*/*D* = 2.17) belongs to fluctuations of the drag force. Figure 4 *c* also indicates presence of multiple frequencies in signals of the fluctuating drag coefficient, while a single dominating frequency can be identified for the lift force coefficient in Figure 4 *d*. Figures 4 *c* and 4 *d* demonstrate that the frequency of both lift and drag forces generally increases with the growing *L*/*D* ratio, and the maximum frequency is indicated by signals at *L*/*D* = 2.67 and 2.83.

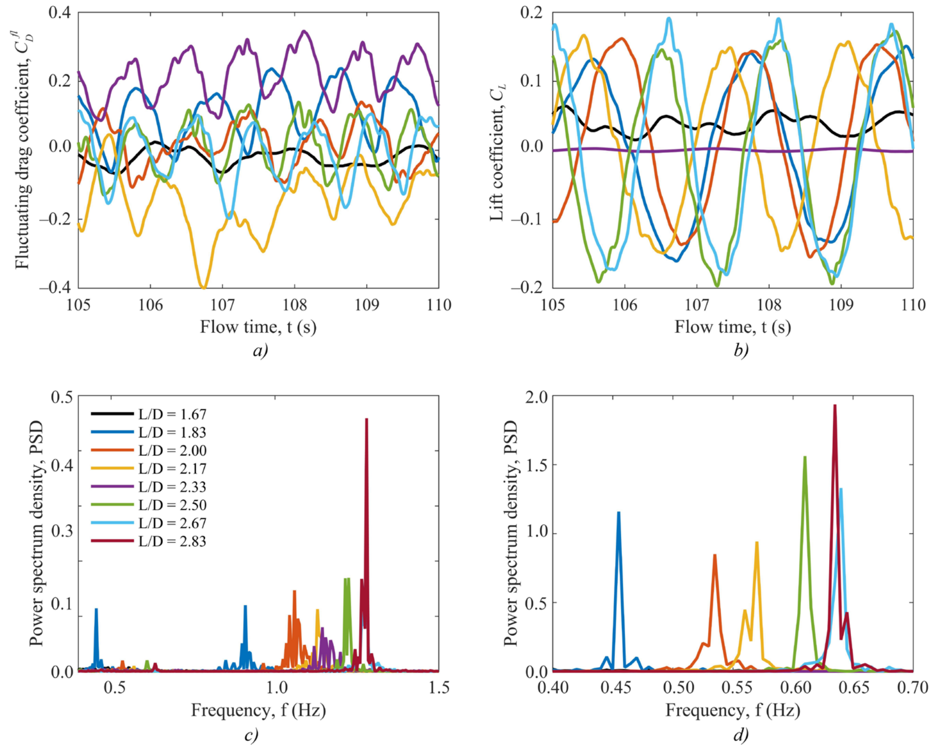


Fig. 4. Time histories of fluid force coefficients for cylinder 1 in the uniform flow:
a — fluctuating drag coefficient; *b* — lift coefficient; *c* — fluctuating drag coefficient FFT; *d* — lift coefficient FFT

Relatively similar complexity of frequencies of the lift force is observed in Figure 6 *d* for cylinder 3, where one to two dominant frequencies could be clearly identified. At the same time, more than two frequencies are observed in Figure 6 *c* for each signal of the fluctuating drag force. The pattern of growth in the overall dominant frequency with the increasing *L*/*D* is still recognisable for cylinder 3, similar to cylinder 1. Combination of frequencies is even more complex for cylinders 2 and 4, as comes from Figures 5 *c*–*d* and 7 *c*–*d*, this is not possible to indicate clear dependences in the frequencies of the fluctuating drag force. Some resemblance of the found growth trend could be still observed in Figure 5 *d* for the lift force coefficient for cylinder 2. This provides evidence for the generally unstable nature of hydrodynamic loads acting on the square cross-section shown in Figure 5.

Impact of the *L*/*D* ratio on the mean drag coefficient for cylinder 1, based on Table 3, is partially confirmed: apart from a couple of deviations, the mean drag force increases with the growth of *L*/*D*. Data for cylinders 2 and 4 do not indicate a specific pattern, as the values fluctuate back and forth within 10% from the initial mean drag coefficient at the smallest *L*/*D*. Cylinder 3, on the contrary, indicates a stable pattern of the reduced mean drag coefficient with the increased *L*/*D*, so that the reducing ability of the upstream D-shaped structure is evident, but for the central cylinder only. The largest mean drag coefficient of 1.02 is linked to cylinder 4 at *L*/*D* = 2.67. The considered range of *L*/*D* allows observing an important transition from the strong to minor interference in the wake of the three paired structures.

The highest fluctuating drag coefficients of 1.54 and 1.36 are linked to cylinders 2 and 4, respectively, both observed at *L*/*D* = 1.83. The feature of the maximum amplitude of the fluctuating drag coefficient, indicated in Table 2, is in absence of a specific dependence from the *L*/*D*, the values rapidly change from near zero to relatively high with a small increment of change in the ratio. The fluctuating drag coefficient has generally the lowest amplitudes for cylinder 1, average amplitudes — for cylinder 3, and the largest amplitudes — for cylinders 2 and 4.

The largest maximum amplitude of the lift coefficient occurs at *L*/*D* = 2.83 for cylinder 2. The lift coefficient generally resembles the distribution, similar to the maximum amplitude found for the fluctuating drag coefficient: the lift force appears to be the smallest for cylinder 1, relatively intermediate — for cylinder 3, and the highest — for cylinders 2 and 4, with no specific pattern linked to the *L*/*D* increase and reduction. This allows us to conclude that the ability to

reduce hydrodynamic forces by placing the upstream D-shaped structure in front of the array is limited. The force reduction is observed mainly for the structure placed in tandem downstream, and the effect is most pronounced for the mean drag coefficient, with some reduced effects also seen for the fluctuating drag and lift coefficients.

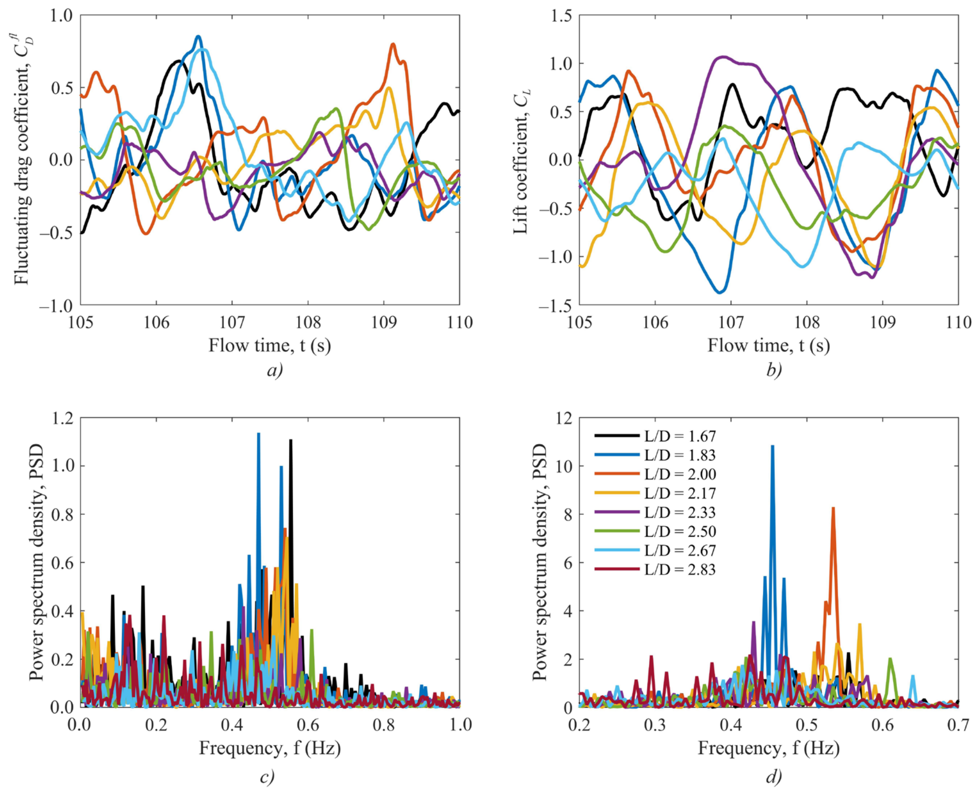


Fig. 5. Time histories of fluid force coefficients for cylinder 2 in the uniform flow:
a — fluctuating drag coefficient; *b* — lift coefficient; *c* — fluctuating drag coefficient FFT; *d* — lift coefficient FFT

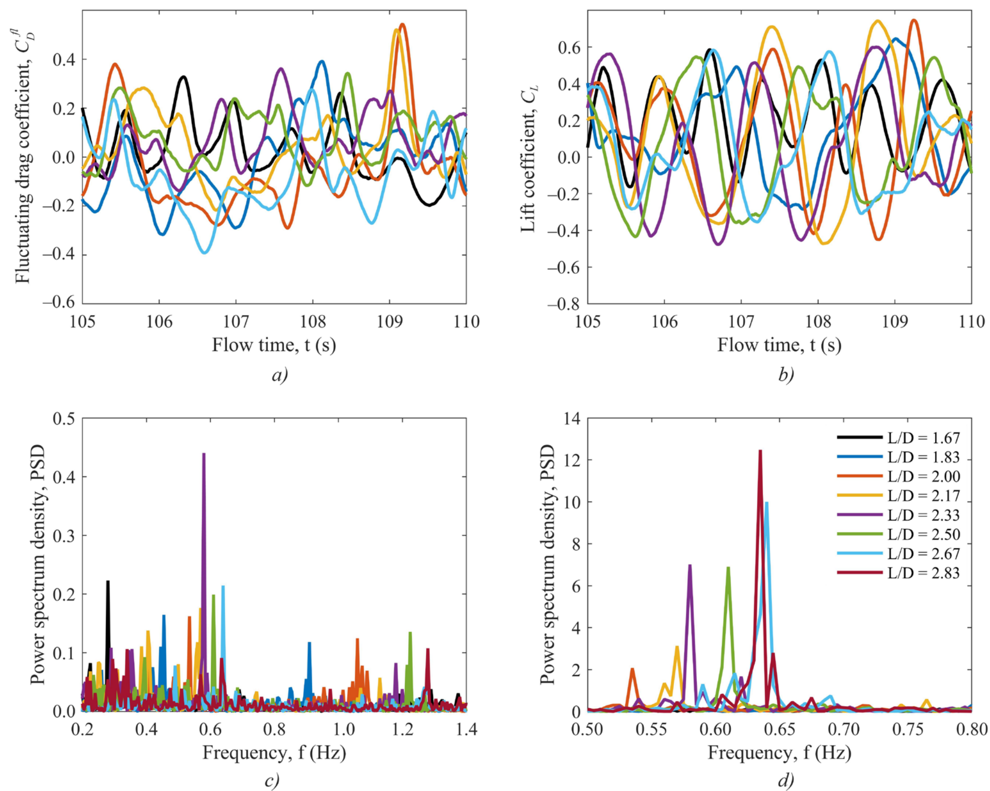


Fig. 6. Time histories of fluid force coefficients for cylinder 3 in the uniform flow:
a — fluctuating drag coefficient; *b* — lift coefficient; *c* — fluctuating drag coefficient FFT; *d* — lift coefficient FF

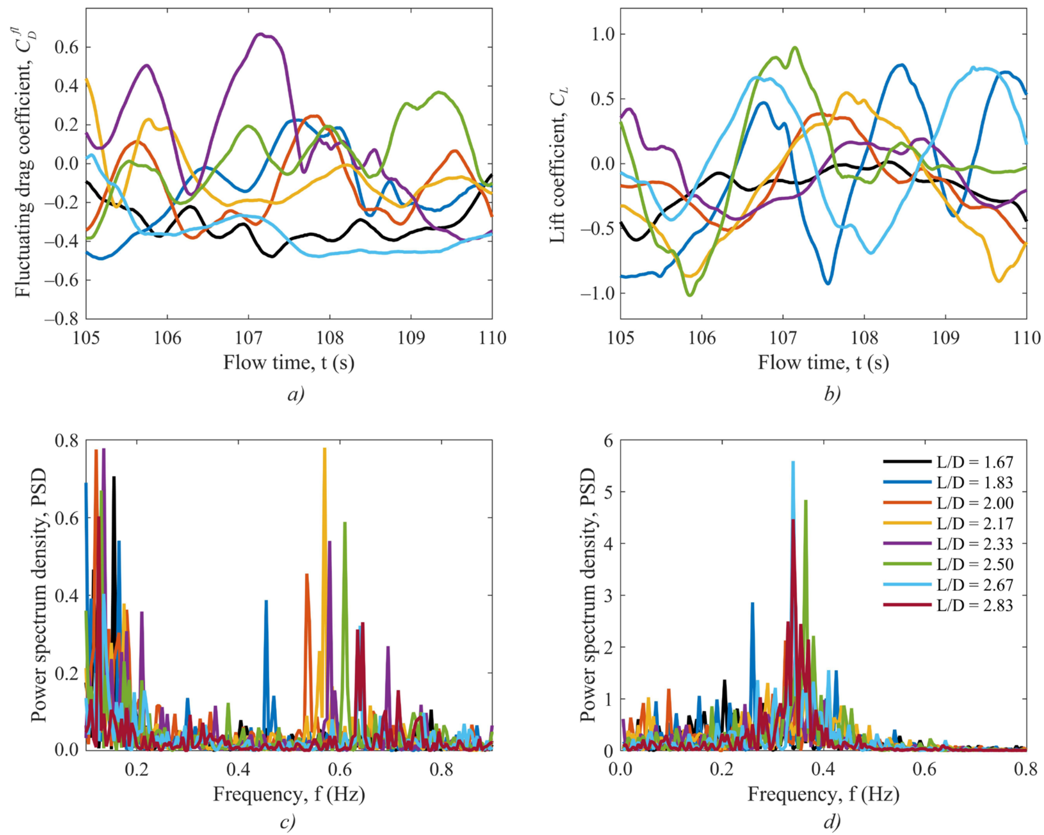


Fig. 7. Time histories of fluid force coefficients for cylinder 4 in the uniform flow:
a — fluctuating drag coefficient; *b* — lift coefficient; *c* — fluctuating drag coefficient FFT; *d* — lift coefficient FFT

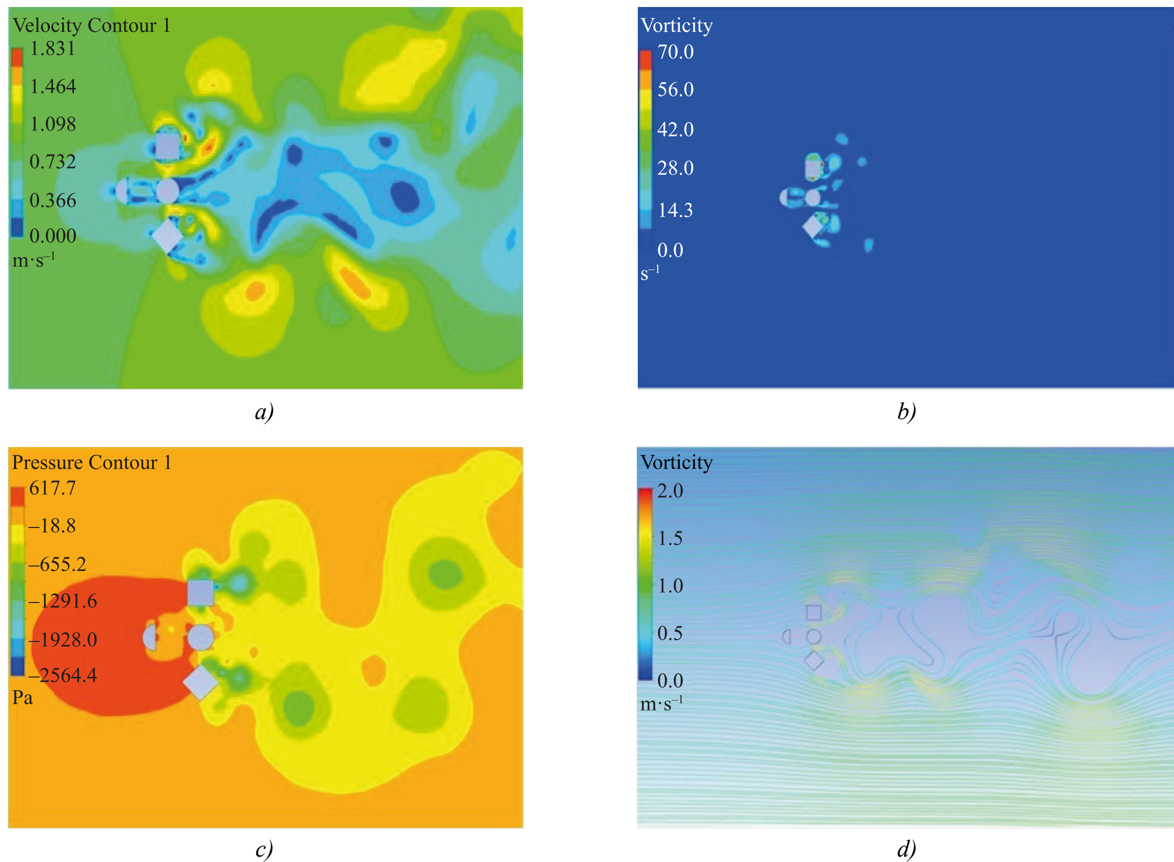


Fig. 8. Contours of the flow characteristics for L/D = 1.67 at 200 seconds:
a — velocity contour; *b* — vorticity contour; *c* — pressure contour; *d* — streamline

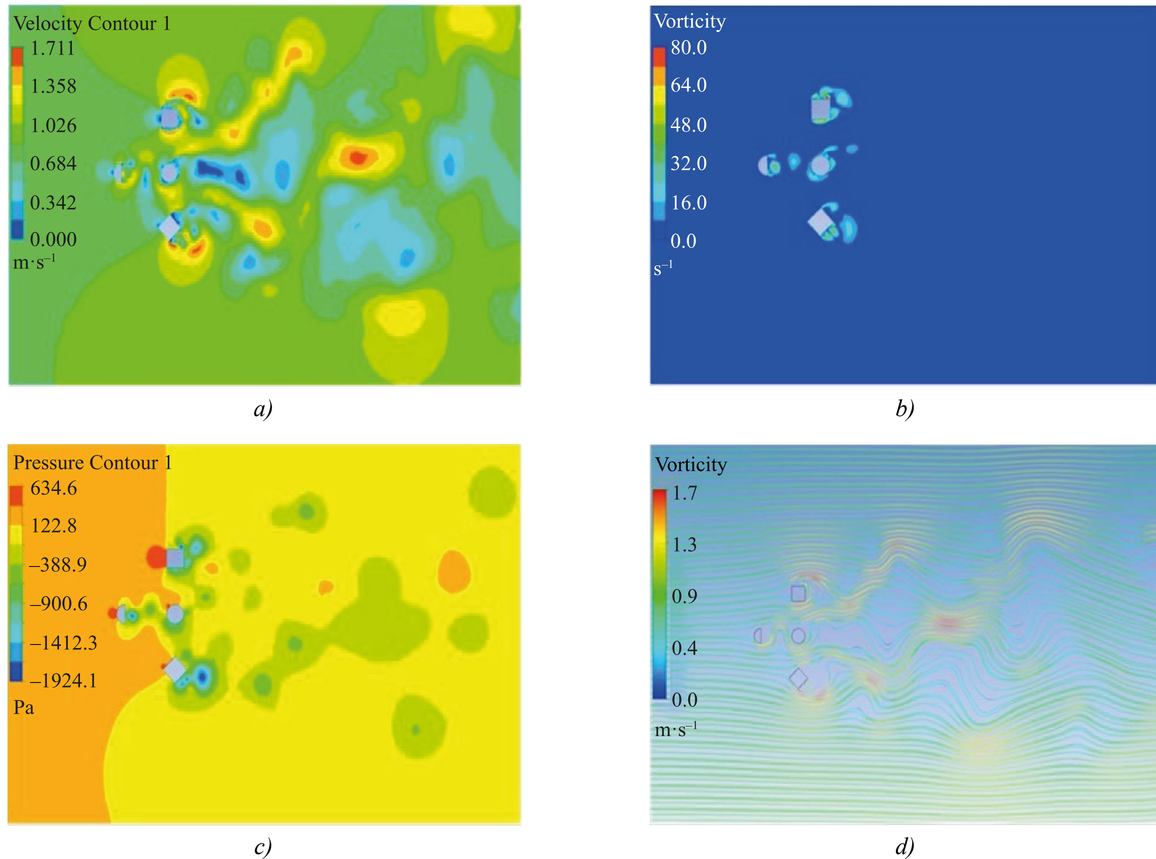


Fig. 9. Contours of the flow characteristics for L/D = 2.83 at 200 seconds:
a — velocity contour; *b* — vorticity contour; *c* — pressure contour; *d* — streamline

Figures 8–9 show the velocity, vorticity, pressure and streamlines of the flow around cylinders for some selected L/D, where both proximity and wake interference among the cylinders are presented for the time step of 200 s. The flow around cylinders is complex, and vortex formation patterns are highly affected, as the distance between the cylinders increases. The proximity interference is observed for cylinders 2, 3, and 4, alternate single vortices are shed on the downstream side of these structures. For the wake interference at L/D = 1.67, free shear layers separate from the upstream cylinder 1 and reattach themselves to the upstream side of cylinder 3, and a vortex street is only formed at the downstream side of cylinder 3. At this distance, a broad region of wake is created at the downstream side of cylinders 2, 3, and 4. As the L/D increases above 2.00, there are vortices formed at the upstream side of cylinder 3, in the wake of cylinder 1. A vortex street is also formed at the downstream side of cylinder 3, with formation of 2S vortices. Figures 8 *a*, 9 *c* demonstrate a group of minor vortices formed following the diamond-shaped cylinder 4 and a vortex pair formed in a similar to S+P vortex cycle past cylinder 2.

Discussion and Conclusion. The 2D numerical simulations are performed in this work for cylinders with different cross-sectional shapes at the Reynolds number of 2.5×10^5 using the DES approach. The considered cylinders are studied in a complex position of an upstream D-shaped structure in front of three paired structures, with the aim to investigate the drag-reducing ability of this specific layout, observe the flow complexity, the wake interference from each structure, and vortex formation patterns.

The following conclusions could be made from this study:

1. The ability to reduce hydrodynamic forces by placing the upstream D-shaped structure is mainly limited to the structure placed in tandem downstream, and the effect is most pronounced for the mean drag coefficient.

2. Overall, the mean drag coefficient of cylinders is observed to be affected by varying L/D, with the main effect on the mean drag coefficient of cylinder 1, which grows with increasing L/D, and of cylinder 3, which reduces with increasing L/D.

3. Competition of frequencies is observed for the fluctuating drag coefficient for all structures and lift coefficient signal of cylinders 2 and 4. This competition is due to the joint effects of both the uniform current and wake interference, which intensifies at a lower L/D in terms of changes to the resulting vortex street.

4. Both proximity and wake interference among the cylinders are observed. The flow around cylinders is complex, and vortex formation patterns are highly affected as the distance between the cylinders increased with 2S being the major vortex type formed and shedding the additional vortices from the square and diamond structures.

The study generally contributes to the field of knowledge by advancing our understanding of fluid-structure interactions, drag reduction strategies, and vortex dynamics, with potential applications in offshore energy systems. The current work contributes to the development of the drag reduction strategies through analyzing the impact of the upstream D-shaped structure on downstream cylinders. Understanding how different structural configurations affect drag can inform the design of more efficient systems in various engineering applications, such as subsea transportation of fluids. By observing flow complexity, wake interference, and vortex formation patterns, this study contributes to the understanding of fluid dynamics around complex geometries. This knowledge is crucial for optimizing the performance of structures in environments where fluid flow plays a significant role, such as subsea engineering. The results of the present research highlight the effect of varying the aspect ratio L/D on drag coefficients to inform engineering designs of similar arrangements. This study reveals the intricate vortex dynamics and shedding patterns, particularly concerning the proximity and wake interference among cylinders. Understanding these phenomena can aid in predicting and controlling flow behavior around complex configurations, leading to more efficient designs and better performance in practical applications in offshore systems.

References

1. Zdravkovich MM. Review of Flow Interference between Two Circular Cylinders in Various Arrangements. *Journal of Fluids Engineering.* 1977;99(4):618–633. https://doi.org/10.1115/1.3448871

2. Williamson CHK. Vortex Dynamics in the Cylinder Wake. *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1996;28(1):477–539. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.28.010196.002401

3. Wanhai Xu, Haokai Wu, Kun Jia, Enhao Wang. Numerical Investigation into the Effect of Spacing on the Flow-Induced Vibrations of Two Tandem Circular Cylinders at Subcritical Reynolds Numbers. *Ocean Engineering*. 2021;236:109521. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109521

4. Sumner D, Richards MD, Akosile OO. Two Staggered Circular Cylinders of Equal Diameter in Cross-Flow. *Journal of Fluids and Structures*. 2005;20(2):255–276. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2004.10.006

5. Bearman PW, Wadcock AJ. The Interaction between a Pair of Circular Cylinders Normal to a Stream. *Journal of Fluid Mechanics*. 1973;61(3):499–511. https://doi.org/10.1017/S0022112073000832

6. Annapeh HF, Kurushina V. Numerical Simulation of Flow-Induced Forces on Subsea Structures in a Group Under Uniform and Sheared Flow. In book: Dimitrovová Z, Biswas P, Gonçalves R, Silva T. (eds). *Recent Trends in Wave Mechanics and Vibrations*. Cham: Springer; 2022. P. 512–522. https://doi.org/10.1007/978-3-031-15758-5_52

7. Annapeh HF, Kurushina V. Flow-Induced Forces for a Group of One Large and Several Small Structures in the Sheared Turbulent Flow. *Fluids*. 2023;8(5):158. https://doi.org/10.3390/fluids8050158

8. Annapeh HF, Kurushina V. Hydrodynamic Loads on a Group of Six Structures of Different Cross-Sections in Uniform and Sheared Flow. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11(2):383. https://doi.org/10.3390/jmse11020383

9. Mannini C, Marra AM, Massai T, Bartoli G. Interference of Vortex-Induced Vibration and Transverse Galloping for a Rectangular Cylinder. *Journal of Fluids and Structures*. 2016;66:403–423. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.08.002

10. Marra AM, Mannini C, Bartoli G. Measurements and Improved Model of Vortex-Induced Vibration for an Elongated Rectangular Cylinder. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2015;147:358–367. https://doi.org/10.1016/j.jweia.2015.08.007

11. Bin Liu, Renjie Jiang. Vortex-Induced Vibrations of a Rectangular Cylinder. *Ocean Engineering*. 2022;266:112883. https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112883

12. Jauvtis N, Govardhan R, Williamson CHK. Multiple Modes of Vortex-Induced Vibration of a Sphere. *Journal of Fluids and Structures.*2001;15(3–4):555–563. https://doi.org/10.1006/jfls.2000.0348

13. Govardhan RN, Williamson CHK. Vortex-Induced Vibrations of a Sphere. *Journal of Fluid Mechanics*. 2005;531:11–47. https://doi.org/10.1017/S0022112005003757

14. Gabyshev DN, Szakáll M, Shcherbakov DV, Fedorets AA, Dyachkov SM. Oscillatory Signatures in the Raindrop Motion Relative to the Air Medium with Terminal Velocity. *Atmosphere.* 2022;13(7):1137. https://doi.org/10.3390/atmos13071137

15. Leontini JS, Thompson MC. Vortex-Induced Vibrations of a Diamond Cross-Section: Sensitivity to Corner Sharpness. *Journal of Fluids and Structures.* 2013;39:371–390. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.01.002

16. Arionfard H, Mohammadi S. Numerical Investigation of the Geometrical Effect on Flow-Induced Vibration Performance of Pivoted Bodies. *Energies*. 2021;14(4):1128. https://doi.org/10.3390/en14041128

17. Mehdipour I, Madaro F, Rizzi F, De Vittorio M. Comprehensive Experimental Study on Bluff Body Shapes for Vortex-Induced Vibration Piezoelectric Energy Harvesting Mechanisms. *Energy Conversion and Management: X.* 2022;13:100174. https://doi.org/10.1016/j.ecmx.2021.100174

18. Lehmkuhl O, Rodríguez I, Borrell R, Chiva J, Oliva A. Unsteady Forces on a Circular Cylinder at Critical Reynolds Numbers. *Physics of Fluids.* 2014;26(12):125110. https://doi.org/10.1063/1.4904415

19. Achenbach E, Heinecke E. On Vortex Shedding from Smooth and Rough Cylinders in the Range of Reynolds Numbers 6×10³ to 5×10⁶. *Journal of Fluid Mechanics*. 2006;109:239–251. https://doi.org/10.1017/S002211208100102X

20. Wornom S, Ouvrard H, Salvetti MV, Koobus B, Dervieux A. Variational Multiscale Large-Eddy Simulations of the Flow past a Circular Cylinder: Reynolds Number Effects. *Computers & Fluids*. 2011;47(1):44–50. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.02.011

21. Porteous A, Habbit R, Colmenares J, Poroseva S, Murman SM. Simulations of Incompressible Separated Turbulent Flows around Two-Dimensional Bodies with URANS Models in OpenFOAM. In: *Proc. 22nd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.* Reston, VA: AIAA; 2015. P. 2609. https://doi.org/10.2514/6.2015-2609

22. Nazvanova A, Guang Yin, Muk Chen Ong. Numerical Investigation of Flow around Two Tandem Cylinders in the Upper Transition Reynolds Number Regime Using Modal Analysis. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022;10(10):1501. https://doi.org/10.3390/jmse10101501

About the Authors:

Henry Francis Annapeh, Research Assistant, Laboratory of Vibration and Hydrodynamics Modelling, Industrial University of Tyumen (38, Volodarskogo Str., Tyumen, 625000, Russian Federation), ORCID, ScopusID, kinghenry939@gmail.com

Victoria A. Kurushina, Head of the Laboratory of Vibration and Hydrodynamics Modelling, Industrial University of Tyumen (38, Volodarskogo Str., Tyumen, 625000, Russian Federation), SPIN-code: 7681–7930, ORCID, ScopusID, ResearcherID, v.kurushina@outlook.com

Об авторах:

Генри Франсис Аннапе, лаборант лаборатории вибрационного и гидродинамического моделирования Тюменского индустриального университета (625000, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 38), ORCID, ScopusID, kinghenry939@gmail.com

Виктория Александровна Курушина, заведующий лаборатории вибрационного и гидродинамического моделирования Тюменского индустриального университета (625000, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 38), SPIN-код: 7681–7930, ORCID, ScopusID, ResearcherID, v.kurushina@outlook.com

Claimed Contributorship:

HF Annapeh: conceptualization, literature review, methodology, investigation, computation, processing the results, original draft preparation, editing.

VA Kurushina: methodology, research management, investigation, computation, processing the results, financial backing, review and editing.

Заявленный вклад авторов:

Г.Ф. Аннапе: концептуализация, обзор литературы, методология, исследование, расчёты, обработка результатов, подготовка первого черновика статьи, редактирование.

В.А. Курушина: методология, руководство исследованием, расчёты, обработка результатов, финансирование, редактирование статьи.

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

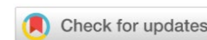
Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received / Поступила в редакцию 17.03.2024
Revised / Поступила после рецензирования 10.04.2024
Accepted / Принята к публикации 21.04.2024

МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 534.1
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-148-158

Оригинальное теоретическое исследование

Об одном методе расчета изгибных и сдвиговых колебаний пористого пьезоэлемента в низкочастотной области



EDN: VPUERG

А.Н. Соловьев[1,2,3] ✉, **В.А. Чебаненко[2,3,4]**, **П.А. Оганесян[2]**, **Е.И. Фоменко[2]**
[1] Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Республика Крым
[2] Южный Федеральный Университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[3] Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[4] Южный Научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ solovievarc@gmail.com

Аннотация
Введение. Устройства сбора и накопления энергии из внешней среды представляют собой маломощные источники электрической энергии, которые активно используются, в том числе в автономных приборах мониторинга поврежденного состояния различных конструкций. Рабочим элементом этих устройств является пьезоэлектрический генератор (ПЭГ) — преобразователь механической энергии в электрическую. Конструирование ПЭГ связано с предварительным построением их математических и компьютерных моделей, с помощью которых производится расчет и оптимизация конструкций. Одним из способов моделирования и расчета ПЭГ является разработка приближенных методов расчета на основе прикладных теорий. В литературе известны и ранее разработаны прикладные теории расчета изгибных колебаний многослойных пьезоактивных пластин. Однако информации об изгибно-сдвиговых колебаниях, как инструменте повышения эффективности инженерных расчетов описанных конструкций, в научной литературе недостаточно. Целью настоящей работы являлась разработка прикладного метода расчета изгибных и сдвиговых колебаний пьезокерамических пластин, в том числе пористых.
Материалы и методы. В качестве пьезоактивного материала пластины используется пьезокерамика PZT-4, в том числе пористая. При использовании пористой керамики жесткость конструкции уменьшается в большей степени, чем пьезомодули, что позволяет получить более эффективный ПЭГ при механическом воздействии. Математическая постановка осуществлена в рамках линейной теории электроупругости при поляризации пластины по толщине. Боковые стороны пластины электродированы, правая сторона закреплена, а на левой задан гладкий контакт в вертикальной стенке. Установившиеся колебания пластины вызываются давлением на лицевые поверхности пластины или разностью электрических потенциалов на электродах. Для расчета характеристик ПЭГ в работе предлагается прикладная теория, основанная на гипотезах о распределении характеристик напряженно-деформированного состояния и электрического поля.
Результаты исследования. Рассмотрены поперечные колебания пьезокерамической пластины в низкочастотной области (ниже первого изгибно-сдвигового резонанса). В силу того, что математическая постановка рассмотрена в рамках линейной теории упругости, задача разделилась на сумму двух. В первой учитывалось механическое воздействие: на лицевые поверхности пластины действует распределенная нагрузка и поперечная сила на левом конце, а потенциалы на электродах равны нулю. Во второй задаче механические нагрузки отсутствовали, но задавалась разность потенциалов на электродах. На основе гипотез о распределении деформаций, механических напряжений и электрического потенциала обе задачи были сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий. Сравнение с результатами расчетов методом конечных элементов в пакете ACELAN показали адекватность предложенной прикладной теории в низкочастотной области.

Обсуждение и заключение. Поскольку постановка задачи рассматривалась в линейной теории электроупругости и изучалась низкочастотная область, в работе удалось задачу об изгибных и сдвиговых колебаниях пластины из пористой пьезокерамики разделить на две: изгибную — с механическим воздействием при нулевых потенциалах и сдвиговую — при задании разности потенциалов и нулевом механическом воздействии. Использованы соответствующие гипотезы об изгибе и сдвиге, построены две системы обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий, которые решаются аналитически без использования «тяжелых» конечно-элементных пакетов. Для сравнения результатов и подтверждения адекватности предложенного метода проведено конечно-элементное моделирование таких задач в специализированном пакете ACELAN. Это сравнение показало, что ошибка в определении смещений и электрического потенциала при использовании этого подхода, в случае задания механических нагрузок и разности потенциалов, не превышает 6 %. Разработанный в статье метод может быть применен при проектировании пьезоэлектрических генераторов накопления энергии в низкочастотной области.

Ключевые слова: устройство сбора энергии, пьезоэлектрический генератор, пористая керамика, изгиб пластины, сдвиг пластины, прикладная теория

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции журнала и рецензентам за внимательное отношение к статье.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ (№ 22–11–00302) в Южном федеральном университете, https://rscf.ru/project/22-11-00302/

Для цитирования. Соловьев А.Н., Чебаненко В.А., Оганесян П.А., Фоменко Е.И. Об одном методе расчета изгибных и сдвиговых колебаний пористого пьезоэлемента в низкочастотной области. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):148–158. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-148-158

Original Theoretical Research

On a Method for Calculating Bending and Shear Vibrations of a Porous Piezoelement in the Low-Frequency Region

Arkadiy N. Soloviev[1,2,3] ✉, **Valery A. Chebanenko**[2,3,4], **Pavel A. Oganesyan**[2], **Elizaveta I. Fomenko**[2]

[1] Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov, Simferopol, Republic of Crimea
[2] Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[3] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[4] Southern Research Center, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ solovievarc@gmail.com

Abstract

Introduction. Devices for collecting and storing energy from the external environment are low-power sources of electric energy that are actively used. The autonomous devices for monitoring the damaged condition of various structures include them as well. The working element of these devices is a piezoelectric generator (PEG) — a converter of mechanical energy into electrical energy. The design of PEG is associated with the preliminary construction of their mathematical and computer models, with the help of which the calculation and optimization of structures is carried out. One of the ways to model and calculate PEG is to develop approximate calculation methods based on applied theories. The applied theories for calculating bending vibrations of multilayer piezoactive plates are known and previously developed in the literature. However, in the scientific literature there is not enough information about bending and shear vibrations as a tool for improving the efficiency of engineering calculations of the described structures. The objective of this work was to develop an applied method for calculating bending and shear vibrations of piezoceramic plates, including porous ones.

Materials and Methods. Piezoceramics PZT-4, including porous ones, were used as the piezoactive material of the plate. When using porous ceramics, the rigidity of the structure decreased to a greater extent than the piezoelectric modules, which made it possible to obtain a more effective PEG under mechanical action. The mathematical formulation was carried out within the framework of the linear theory of electroelasticity with plate polarization in thickness. The sides of the plate were electrodated, the right side was fixed, and a smooth contact in the vertical wall was set on the left side. Steady-state vibrations of the plate were caused by pressure on the front surfaces of the plate or the difference in electrical potentials at the electrodes. To calculate the characteristics of PEG, the authors proposed an applied theory based on hypotheses about the distribution of characteristics of the stress-strain state and the electric field.

Results. Transverse vibrations of a piezoceramic plate in the low-frequency region (below the first bending-shear resonance) were studied. Due to the fact that the mathematical formulation was considered within the framework of the linear theory of elasticity, the problem was divided into the sum of two. The first one took into account the mechanical

effect: a distributed load and a transverse force at the left end acted on the front surfaces of the plate, and the potentials at the electrodes were zero. In the second task, there were no mechanical loads, but the potential difference was set at the electrodes. Based on hypotheses about the distribution of deformations, mechanical stresses and electric potential, both problems were reduced to a system of ordinary differential equations and boundary conditions. Comparison with the results of calculations by the finite element method in the ACELAN package showed the adequacy of the proposed applied theory in the low-frequency region.

Discussion and Conclusion. Since the formulation of the problem was considered in the linear theory of electroelasticity, and the low-frequency region was studied, the work succeeded in dividing the problem of bending-shear vibrations of a porous piezoceramic plate into two: bending — with mechanical action at zero potentials, and shear — when setting the potential difference and zero mechanical action. The corresponding hypotheses about bending and shear were used. Two systems of ordinary differential equations and boundary conditions, which were solved analytically without the use of "heavy" finite element packages, were constructed. To compare the results and confirm the adequacy of the proposed method, the finite element modeling of such tasks was carried out in a specialized ACELAN package. The comparison showed that the error in determining displacements and electric potential when using this approach, in the case of setting mechanical loads and potential differences, did not exceed 6%. The method developed in the paper can be applied in the design of piezoelectric generators for energy storage in the low-frequency region.

Keywords: energy collection device, piezoelectric generator, porous ceramics, plate bending, plate shear, applied theory

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board of the journal and the reviewers for their attentive attitude to the article.

Funding Information. The research was done at the Southern Federal University with the financial support from the Russian Science Foundation (grant no. 22–11–00302). https://rscf.ru/project/22-11-00302/

For Citation. Soloviev AN, Chebanenko VA, Oganesyan PA, Fomenko EI. On a Method for Calculating Bending and Shear Vibrations of a Porous Piezoelement in the Low-Frequency Region. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):148–158. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-148-158

Введение. Пьезоэлектрические генераторы (ПЭГ) используются для преобразования механической энергии в электрическую с последующим ее накоплением. Одна из областей применения ПЭГ — создание маломощных автономных возобновляемых источников электрической энергии. Рабочим элементом ПЭГ является пьезокерамический элемент определенной формы. Форма и тип деформации этого элемента определяют пьезомодуль, который характеризует преобразование механической энергии деформации в электрическую. Так пьезомодуль d_{33} связан с растяжением-сжатием вдоль оси поляризации, d_{31} — с такой же деформацией в поперечном направлении к этой оси, d_{15} — со сдвигом. Использование пористой керамики позволяет создавать более эффективные ПЭГ. Это связано с тем, что модули упругости пористой керамики с ростом пористости убывают значительно сильнее, чем пьезомодули. Таким образом при одной и той же механической нагрузке амплитуда деформации у пористой керамики будет больше, следовательно, выходной электрический потенциал также больше.

Расчет ПЭГ может быть произведен методом конечных элементов, реализованном в пакетах ANSYS, ACELAN, COMSOL и других. Для пьезоэлементов, один или два размера которых значительно меньше других (пластины, стержни), могут быть построены прикладные теории расчета на основе гипотез о распределении механического и электрического полей. Без применения «тяжелых» конечно-элементных пакетов прикладные теории позволяют моделировать различные устройств на основе пьезоактивных материалов. В качестве таких материалов рассматривались пьезоэлектрические, пьезомагнитные и композиционные пьезомагнитоэлектрические. Построение этих теорий основано на принятии гипотез о распределении механических, электрических и магнитных полей. Эти гипотезы связаны с характером колебаний упругих и пьезоактивных элементов ПЭГ. Наиболее распространенными конструкциями являются активные и полупассивные биморфы на основе многослойных пластин, поляризованные по толщине с электродами на лицевых поверхностях, совершающие поперечные изгибные колебания. Исследованию устройств со сдвиговой деформацией пьезоэлементов посвящен ряд работ. Электрическая модель с пьезоэлектрическими определяющими уравнениями режима d_{15} и модель с одной степенью свободы объединены для описания характеристик сбора энергии пьезоэлектрического кантилевера в сдвиговом режиме в работе [1]. Предлагаемая модель используется для моделирования частотной зависимости выходного пикового напряжения и мощности. Результаты показывают хорошее совпадение с экспериментом и конечно-элементным расчетом в ANSYS. В работе [2] разработан пьезоэлектрический преобразователь энергии сдвигового режима для использования энергии потока воды под давлением. Он преобразует энергию потока в электрическую энергию путем пьезоэлектрического преобразования с колебанием пьезоэлектрической пленки. Разработана модель конечных элементов для оценки генерируемого напряжения пьезоэлектрической пленки, которая хорошо

согласуется с проведенным натурным экспериментом. Одномерная полностью связанная модель колебания балки на основе гипотез типа Тимошенко, которая предоставляет единую общую основу для анализа энергии в режиме сдвига и изгиба, представлена в работе [3]. В работе [4] изучается влияние неоднородности свойств пластины при сдвиговых и крутильных колебаниях ее центральной части. В экспериментальной работе [5] был представлен многослойно-цилиндрический пьезоэлектрический сдвиговый актуатор (MCPSA), работающий в режиме сдвига d_{15}, для прецизионного срабатывания при большой механической нагрузке. Актуатор был изготовлен из пьезоэлектрических керамических колец $Pb(Zr,Ti)O_3$ (PZT-51), которые были концентрически собраны вместе в электрически параллельном соединении с попеременно положительной и отрицательной поляризацией в осевом направлении. В работе [6] создан метаматериал из идентичных элементарных ячеек, спроектирован и изготовлен искусственный прототип устройства с характерными узорчатыми электродами и расположенными в ряд пьезокерамическими субъединицами, который, как доказано, идеально генерирует синтетическую деформацию сдвига грани. При том же напряжении возбуждения наблюдается усиление смещения сдвигового типа более чем на порядок, по сравнению с предыдущими объемными элементами в режиме d_{15}. В статической постановке в работе [7] теоретически установлено поле электромеханической связи в сдвигово-изгибающем режиме для кольцеобразной пьезоэлектрической пластины. В соответствии с классической теорией упругих пластин малого изгиба и пьезоэлектрическими определяющими уравнениями было достигнуто аналитическое решение изгибной деформации пьезоактюатора под действием электрического поля и концентрированной или равномерно распределенной механической нагрузки. Механизм создания изгибной деформации объясняется осесимметричной сдвиговой деформацией, которая дополнительно вызывает изгибную деформацию одной пьезоэлектрической пластины в форме кольца. Этот механизм существенно отличается от механизма пьезоэлектрических биморфных или униморфных приводов, о которых сообщалось ранее. Проведена оптимизация конструкции кольцеобразного пьезоактуатора. В работе [8] на основе одномерной модели строится функция отклика датчика на основе сдвиговых резонаторов (срезы кварца) объемной акустической волны, которые перспективны для поточных измерений вязкости жидкости, например, в промышленных процессах. В работе [9] с помощью метода конечных элементов исследовался пьезоэлектрический преобразователь управления высотой полета с использованием деформации модели сдвига. В [10] теория функционально-градиентной пластины с четырьмя неизвестными сдвиговой деформации применяется для выражения компоненты смещения. Распределение электрического потенциала представляет собой линейную функцию по толщине. Пластина находится под механической нагрузкой и электрическим напряжением. Основные уравнения и граничные условия выводятся с использованием принципа виртуальной работы. Проведен анализ напряжений и деформаций от параметров конструкции. Электромеханический анализ потери устойчивости пьезоэлектрической нанопластины при сдвиге с использованием модифицированной теории парных напряжений с различными граничными условиями изучался в работе [11]. Чтобы учесть электрические эффекты, к пьезоэлектрической нанопластине прикладывали внешнее электрическое напряжение. Была использована упрощенная теория сдвиговой деформации первого порядка. Основные дифференциальные уравнения были получены с использованием принципа Гамильтона и нелинейных деформаций Фон-Кармана. В итоге результаты показали, что влияние внешнего электрического напряжения на критическую сдвиговую нагрузку, возникающую на пьезоэлектрической нанопластине, незначительно. В работе [12] с помощью комбинации двух классических подходов моделирования нелинейного поведения пьезоэлектрических материалов исследуется пьезоэлектрический привод сдвигового типа для атомно-силового микроскопа. В частности, новизна предлагаемого метода состоит в том, что он сочетает в себе два источника нелинейности полезависимой модели Мюллера и Чжана с частотно-зависимой моделью Дамьяновича. Численные результаты, полученные с помощью метода конечных элементов (МКЭ), сравниваются с экспериментом.

Менее исследованы в научной литературе колебания, в которых кроме изгиба присутствует сдвиг, т.е. «рабочим» является пьезомодуль d_{15}, значение которого убывает с увеличением пористости, но в меньшей степени, чем упругие модули. Последнее обстоятельство позволяет построить эффективное устройство преобразования энергии. Поэтому разработка прикладной теории расчета ПЭГ с использованием пористой пьезокерамики на основе упрощенных моделей без использования «тяжелых» конечно-элементных пакетов представляется весьма актуальной задачей. Целью настоящей работы явилось построение прикладного метода расчета для установившихся поперечных колебаний в низкочастотной области пористой пьезокерамической пластины, характеризующиеся как сдвигом, так и изгибом.

Материалы и методы. Исследуемый ПЭГ представляет собой пьезокерамическую пластину (длина l, толщина h), поляризованную по толщине, консольно-закрепленную по правой боковой стороне, левая боковая сторона прикреплена к инерционной массе, которая совершает вертикальные колебания и закреплена в горизонтальном направлении. Электроды расположены на боковых сторонах пластины, поэтому при разности потенциалов на них и отсутствии механической нагрузки, основной деформацией в низкочастотной области является сдвиг. Рассматриваются колебания, частота которых меньше частоты первого резонанса.

Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи описывается системой дифференциальных уравнений [13] и соответствующими граничными условиями.

$$\begin{aligned} &\rho_{pk}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j && \nabla\cdot\mathbf{D} = 0 \\ &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) - \mathbf{e}_j^T\cdot\mathbf{E} && \mathbf{E} = -\nabla\varphi \\ &\mathbf{D} + \varsigma_d\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \varsigma_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) + \text{э}_j^S\cdot\mathbf{E} && \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right)/2 \end{aligned} \qquad (1)$$

При рассмотрении пористой керамики связности 3–0 в уравнениях (1) используются эффективные физические константы, определенные с помощью пакета ACELAN-COMPOS [14]. Эти эффективные свойства на основе представительных объемов (рис. 1) получены в работе [15] и представлены в таблице 1.

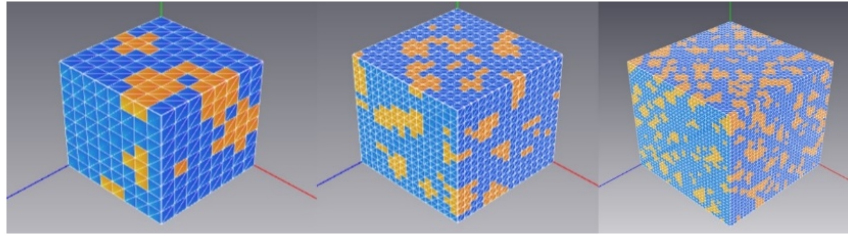


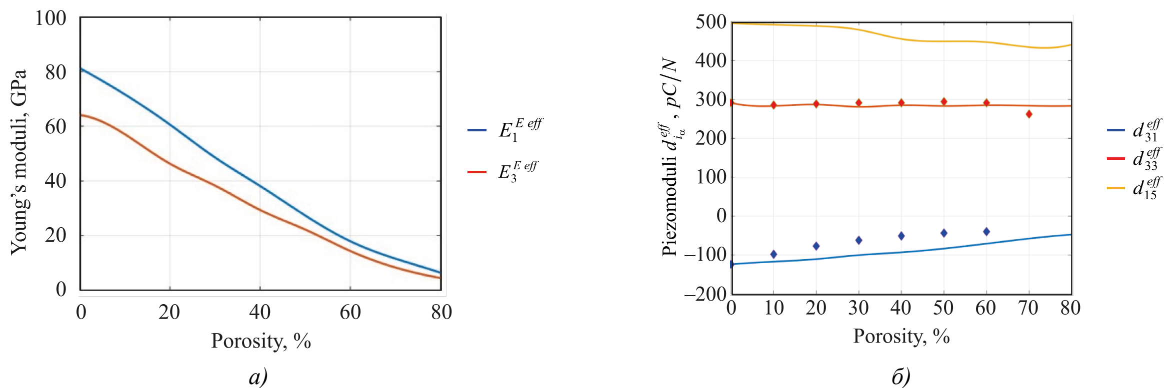
Рис. 1. Представительные объемы в пакете ACELAN-COMPOS [14]

Таблица 1

Эффективные свойства пористой керамики

% пористости	0	10	20	30	40	50	60	70	80
ρ, kg/m^3	7 500	6 750	6 000	5 250	4 500	3 750	3 000	2 250	1 500
$c_{11}^{E\,\mathrm{eff}}$, 10^{10}, N/m^2	13,90	11,56	9,25	6,85	5,05	3,34	2,07	1,26	0,68
$c_{12}^{E\,\mathrm{eff}}$, 10^{10}, N/m^2	7,78	6,15	4,66	3,14	2,10	1,16	0,62	0,28	0,13
$c_{13}^{E\,\mathrm{eff}}$, 10^{10}, N/m^2	7,43	5,82	4,25	2,82	1,87	1,06	0,52	0,24	0,10
$c_{33}^{E\,\mathrm{eff}}$, 10^{10}, N/m^2	11,50	9,53	7,23	5,42	3,91	2,72	1,63	0,91	0,47
$c_{44}^{E\,\mathrm{eff}}$, 10^{10}, N/m^2	2,56	2,23	1,83	1,44	1,10	0,74	0,44	0,23	0,10
e_{33}^{eff}, C/m^2	15,10	13,38	11,37	9,59	7,68	5,93	3,93	2,30	1,25
e_{31}^{eff}, C/m^2	–5,20	–4,23	–3,14	–2,07	–1,32	–0,75	–0,43	–0,21	–0,10
e_{31}^{eff}, C/m^2	12,70	10,96	8,96	6,91	5,00	3,30	1,95	1,00	0,44
$\kappa_{11}^{S\,\mathrm{eff}}/\varepsilon_0$	730	663	582	509	439	349	263	191	122
$\kappa_{33}^{S\,\mathrm{eff}}/\varepsilon_0$	635	567	492	413	345	270	199	130	75

По данным таблицы 1 построены зависимости эффективных упругих модулей и пьезомодулей от процента пористости [15], которые представлены на рис. 2.



а) *б)*

Рис. 2. Зависимости значений от процента пористости [15]: *а* — упругих моделей; *б* — пьезомодулей

В соответствии с результатами, представленными на рис. 2, модуль упругости E_1 убывает значительно быстрей, чем пьезомодуль d_{15}.

Построение прикладной теории

Построенный метод расчета состоит из решения двух задач: в первой рассматривается изгиб под действием механической нагрузки при нулевой разности потенциалов, во второй — моделируется сдвиг, вызванный разностью потенциалов при отсутствии механической нагрузки. В обоих случаях учитывается отсутствие зарядов на лицевых поверхностях пластины. При действии механической нагрузки и разности электрических потенциалов результаты двух задач складываются в силу линейности задачи.

Действие механической нагрузки, потенциалы на электродах равны нулю. Принимаются гипотезы типа Кирхгофа-Лява относительно равенства нулю нормальных напряжений, а для перемещений:

$$u_3 = UZ_2(x),\; u_1 = -\left(\frac{d}{dx}UZ_2(x)\right)z. \tag{2}$$

Распределение электрического потенциала по толщине предполагается квадратичным и симметричным:

$$\phi = \Phi_1(x)\,z\left(2,\frac{z}{h}-1\right)h^{-1} + \Phi_1(x)\,z\left(1+2\frac{z}{h}\right)h^{-1} + \Phi_2(x)\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right). \tag{3}$$

Для учета граничных условий на концах пластины ($x = 0,\, l$) получено выражение для поперечной силы:

$$\begin{aligned} Q_1 = \Bigg(&-\frac{1}{12}\left(-\frac{c_{13}e_{33}\left(\dfrac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)}-\dfrac{8}{h^2}\right)}{c_{33}} + e_{31}\left(\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{8}{h^2}\right)\right)h^3 - \\ &-\frac{1}{12}e_{15}\left(\frac{1}{2}\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{4}{h^2}\right)h^3 - e_{15}h\Bigg)\left(\frac{d}{dx}\Phi_2(x)\right) + \\ &+\Bigg(-\frac{1}{12}\left(-c_{11}-\frac{c_{13}\left(\dfrac{e_{33}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-c_{13}\right)}{c_{33}}+\frac{e_{31}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}\right)h^3 - \\ &-\frac{1}{24}\frac{e_{15}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)h}{c_{33}g_{33}+e_{33}^2}\Bigg)\left(\frac{d^3}{dx^3}UZ_2(x)\right). \end{aligned} \tag{4}$$

С учетом равенства нулю нормальной компоненты вектора электрической индукции на лицевых поверхностях ($z = \pm h$), уравнения для неизвестного прогиба $UZ_2(x)$ и распределения электрического потенциала $\Phi_2(x)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Bigg(&-\frac{1}{2}\left(-\frac{c_{13}e_{33}\left(\dfrac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)}-\dfrac{8}{h^2}\right)}{c_{33}} + e_{31}\left(\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{8}{h^2}\right)\right)h^3 - \\ &-\frac{1}{2}e_{15}\left(\frac{1}{2}\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{4}{h^2}\right)h^3 - e_{15}h\Bigg)\left(\frac{d^2}{dx^2}\Phi_2(x)\right) + \\ &+\Bigg(-\frac{1}{2}\left(-c_{11}-\frac{c_{13}\left(\dfrac{e_{33}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-c_{13}\right)}{c_{33}}+\frac{e_{31}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}\right)h^3 - \\ &-\frac{1}{24}\frac{e_{15}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)h}{c_{33}g_{33}+e_{33}^2}\Bigg)\left(\frac{d^4}{dx^4}UZ_2(x)\right) - W^2\rho h UZ_2(x) - p(x) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left(-\frac{e_{33}^2\left(\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{8}{h^2}\right)}{c_{33}}-g_{33}\left(\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{8}{h^2}\right)\right)\Phi_2\left(x\right)+$$
$$+\left(-g_{11}-\frac{1}{2}g_{11}\left(\frac{1}{2}\frac{8c_{33}g_{33}+8e_{33}^2}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-\frac{4}{h^2}\right)h^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}\Phi_2\left(x\right)\right)+$$
$$+\left(-\frac{g_{33}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-e_{31}-\frac{e_{33}\left(\frac{\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)}{\left(c_{33}g_{33}+e_{33}^2\right)h^2}-c_{13}\right)}{c_{33}}\right)\left(\frac{d^2}{dx^2}UZ_2\left(x\right)\right)- \tag{6}$$
$$-\frac{1}{24}\frac{g_{11}\left(c_{13}e_{33}h^2-c_{33}e_{31}h^2\right)\left(\frac{d^4}{dx^4}UZ_2\left(x\right)\right)}{c_{33}g_{33}+e_{33}^2}=0.$$

Задана разность потенциалов, механическая нагрузка равна нулю. Предполагается независимость поперечного смещения от толщины и равенство нулю продольного перемещения и квадратичное распределение электрического потенциала по толщине (3):

$$u_3=UZ_2\left(x\right),u_1=0. \tag{7}$$

Выражение для поперечной силы:

$$Q_1=-c_{44}\left(\frac{d}{dx}UZ_2\left(x\right)\right)h-e_{15}\left(\frac{d}{dx}\Phi_2\left(x\right)\right)h. \tag{8}$$

С учетом равенства нулю нормальной компоненты вектора электрической индукции на лицевых поверхностях ($z=\pm h$), уравнения для неизвестного прогиба $UZ_2(x)$ и распределения электрического потенциала $\Phi_2(x)$ имеют вид:

$$-c_{44}\left(\frac{d^2}{dx^2}UZ_2\left(x\right)\right)h-e_{15}\left(\frac{d^2}{dx^2}\Phi_2\left(x\right)\right)h-p\left(x\right)-W^2\rho hUZ_2\left(x\right)=0, \tag{9}$$

$$e_{15}\frac{d^2}{dx^2}UZ_2\left(x\right)-g_{11}\frac{d^2}{dx^2}\Phi_2\left(x\right)=0. \tag{10}$$

Результаты исследования. Проведено сравнение результатов расчетов по предложенным прикладным теориям с расчетами колебаний пьезоэлемента ($l=0{,}1$ м, $h=0{,}01$ м) на частоте равной 100 $с^{-1}$ методом конечных элементов в ACELAN [16].

В первой задаче, определяемой уравнениями (5) и (6), при задании равномерно распределенной нагрузки $p(x)=1000$ Па·м и с граничными условиями:

$$\frac{d}{dx}UZ_2\left(0\right)=0,\,Q_1\,|_{x=0}=0,\,\Phi_2\left(0\right)=\Phi_2\left(l\right)=0,\,UZ_2\left(l\right)=0,\,\frac{d}{dx}UZ_2\left(l\right)=0 \tag{11}$$

получены следующие результаты, представленные на рис. 3, 4.

Расчеты показали, что погрешность в определении вертикального смещения — 5,8 %, а для горизонтального смещения составляет 1,2 %.

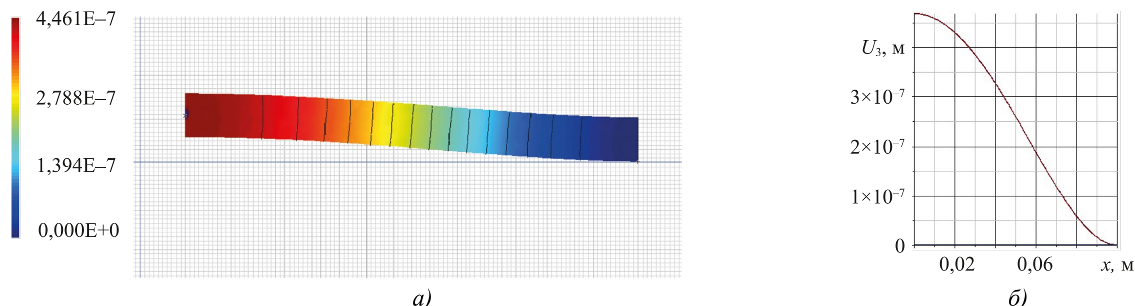


Рис. 3. Вертикальное смещение в ACELAN в первой задаче:
а — распределение; *б* — график на верхней границе

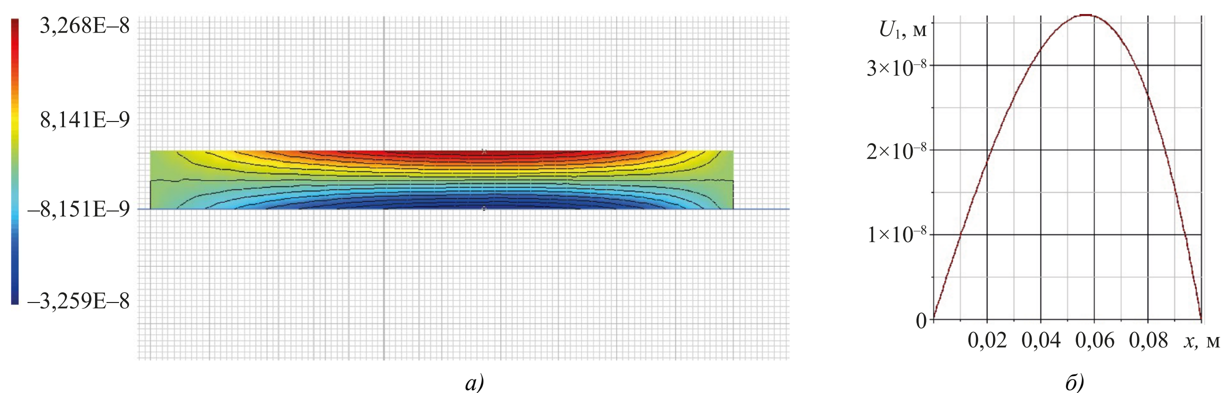


Рис. 4. Горизонтальное смещение в ACELAN в первой задаче:
а — распределение; *б* — график на верхней границе

Во второй задаче, определяемой уравнениями (8) и (9), при задании нулевой нагрузки $p(x) \equiv 0$, разности потенциалов $V_0 = 100$ В и граничными условиями:

$$Q_1 |_{x=0} = 0, \Phi_2(0) = 0, \Phi_2(l) = V_0, UZ_2(l) = 0 \quad (12)$$

получены следующие результаты, представленные на рис. 5, 6.

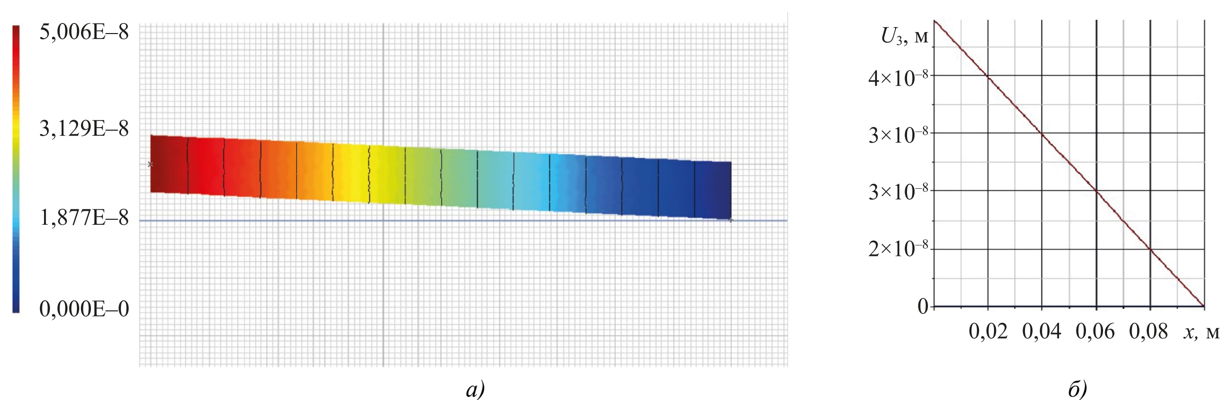


Рис. 5. Вертикальное смещение в ACELAN во второй задаче:
а — распределение; *б* — график на верхней границе

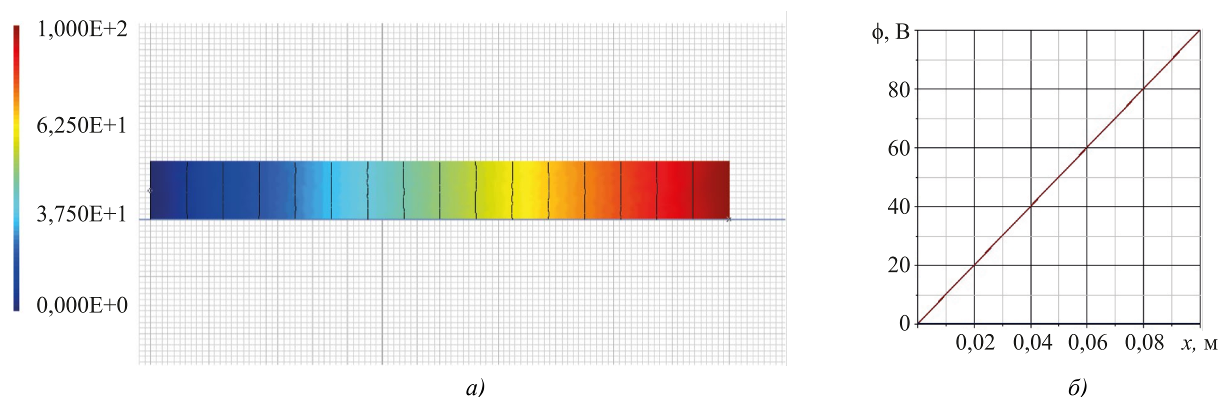


Рис. 6. Электрический потенциал в ACELAN во второй задаче:
а — распределение; *б* — зависимость от продольной координаты в середине толщины

Расчеты показали, что погрешность в определении вертикального смещения составляет 0,8 %, а для электрического потенциала — менее 1 %. Следует отметить, что значения горизонтального смещения, рассчитанные в ACELAN, оказались на три порядка меньше максимального вертикального смещения, что говорит об адекватности гипотезы (7).

При задании механических нагрузок и разности потенциалов погрешность предложенного метода оказалась порядка 6 % для компонент перемещения и электрического потенциала.

Обсуждение и заключение. Как отмечалось в цитируемой литературе, одновременное использование изгиба и сдвига пьезоэлемента может значительно повысить его эффективность. Кроме этого, использование пористой керамики в силу различных зависимостей упругих модулей и пьезомодулей от процента пористости также улучшает выходные характеристики ПЭГ.

В настоящей работе в силу линейной постановки в теории электроупругости удалось построить прикладную теорию расчета изгибно-сдвиговых колебаний пьезоэлемента в низкочастотной области, которая состоит из решения двух задач: в первой действуют механические нагрузки при нулевых потенциалах, а во второй — наоборот — нулевые механические нагрузки и задана разность потенциалов. На основе различных гипотез о распределении механического и электрического полей получены две краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решались аналитически. Проведено сравнение результатов расчета смещений и электрического потенциала по предложенному методу и с помощью МКЭ, реализованного в пакете ACELAN. Эти расчеты подтвердили применимость предложенного метода, погрешность для которого в вычислении вышеуказанных характеристик составила 6 %. Такой точности достаточно для инженерных расчетов, поэтому предложенный метод может быть применен при проектировании пьезоэлектрических устройств, в том числе при сборе и накоплении энергии. Дальнейшее развитие этой прикладной теории будет направлено на охват более широкого частотного диапазона, включая первый изгибно-сдвиговый резонанс.

Список литературы / References

1. Liang Zhou, Jing Sun, Xuejun Zheng, Shuifeng Deng, Jihe Zhao, Jihe Zhao, et al. A Model for the Energy Harvesting Performance of Shear Mode Piezoelectric Cantilever. *Sensors and Actuators A: Physical.* 2012;179:185–192. http://doi.org/10.1016/j.sna.2012.02.041

2. Dung-An Wang, Nine-Zeng Liu. A Shear Mode Piezoelectric Energy Harvester Based on a Pressurized Water Fow. *Sensors and Actuators A: Physical.* 2011;167(2):449–458. https://doi.org/10.1016/j.sna.2011.03.003

3. Shreya Banerjee, Sitikantha Roy. A Timoshenko like Model for Piezoelectric Energy Harvester with Shear Mode. *Composite Structures.* 2018;204:677–688. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.117

4. Yanping Kong, Jinxi Liu. Vibration Confinement of Thickness-Shear and Thickness-Twist Modes in a Functionally Graded Piezoelectric Plate. *Acta Mechanica Solida Sinica.* 2011;24(4):299–307. https://doi.org/10.1016/S0894-9166(11)60031-1

5. Xiangyu Gao, Xudong Xin, Jingen Wu, Zhaoqiang Chu, Shuxiang Dong. A Multilayered-Cylindrical Piezoelectric Shear Actuator Operating in Shear (d_{15}) Mode. *Applied Physics Letters.* 2018;112:152902. http://doi.org/10.1063/1.5022726

6. Jikun Yang, Qiang Huan, Yang Yu, Jingen Wu, Zhaoqiang Chu, Mohammadjavad Pourhosseiniasl, et al. Tailoring Artificial Mode to Enable Cofired Integration of Shear-type Piezoelectric Devices. *Advanced Science.* 2020;7(17):2001368. https://doi.org/10.1002/advs.202001368

7. Zejun Yu, Shuxiang Dong, Daining Fang. Theoretical Analysis on Shear-Bending Deflection of a Ring-Shape Piezoelectric Plate. *AIP Advances.* 2016;6(2):025124. https://doi.org/10.1063/1.4943219

8. Ewald Benesa, Helmut Nowotny, Stefan Braun, Stefan Radel, Martin Greöschl. Analytical Sensor Response Function of Viscosity Sensors Based on Layered Piezoelectric Thickness Shear Resonators. *Physics Procedia*. 2015;70:236–240. http://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.08.144

9. Hui Lia, Shengnan Shenb, Kensuke Amemiya, Bo Liu, Hejun Du. Simulation of Piezoelectric Flying Height Control Slider Using Shear-Mode Deformation. *Physics Procedia.* 2011;16:101–110. https://doi.org/10.1016/j.phpro.2011.06.115

10. Zenkour AM, Alghanmi RA. Stress Analysis of a Functionally Graded Plate Integrated with Piezoelectric Faces via a Four-Unknown Shear Deformation Theory. *Results in Physics.* 2019;12:268–277. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.11.045

11. Mohammad Malikan. Electro-Mechanical Shear Buckling of Piezoelectric Nanoplate Using Modified Couple Stress Theory Based on Simplified First Order Shear Deformation Theory. *Applied Mathematical Modelling.* 2017;48:196–207. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.03.065

12. Bo Xue, Emmanuel Brousseau, Chris Bowen. Modelling of a Shear-type Piezoelectric Actuator for AFM-based Vibration-assisted Nanomachining. *International Journal of Mechanical Sciences.* 2023;243:108048. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.108048

13. Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости. *Прикладная математика и механика.* 2000;64(3):381–393. URL: https://pmm.ipmnet.ru/ru/Issues/2000/3 (дата обращения: 04.03.2024).

Belokon' AV, Eremeev VA, Nasedkin AV, Solov'ev AN. Partitioned Schemes of the Finite-Element Method for Dynamic Problems of Acoustoelectroelasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2000;64(3):367–377. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00059-9

14. Kudimova AB, Nadolin DK, Nasedkin AV, Nasedkina AA, Oganesyan PA, Soloviev AN. Finite Element Homogenization of Piezocomposites with Isolated Inclusions Using Improved 3-0 Algorithm for Generating Representative Volumes in ACELAN-COMPOS Package. *Materials Physics and Mechanics.* 2020;44(3):392–403. https://doi.org/10.18720/MPM.4432020_10

15. Nasedkin AV, Oganesyan PA, Soloviev AN. Analysis of Rosen Type Energy Harvesting Devices from Porous Piezoceramics with Great Longitudinal Piezomodulus. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2021;101(3):e202000129. https://doi.org/10.1002/zamm.202000129

16. Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н. Пакет ACELAN и конечно-элементное моделирование гидроакустических пьезопреобразователей. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. Математическое моделирование.* 2001;S1:122–125.

Nasedkin AV, Skaliukh AS, Soloviev AN. ACELAN Package and Finite Element Modeling of Hydroacoustic Piezoelectric Transducers. *Bulletin of Higher Education Institutes. North-Caucasian Region. Natural Sciences.* 2001;S1:122–125. (In Russ.).

Об авторах:

Аркадий Николаевич Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики Крымского инженерно-педагогического университета им. Февзи Якубова (г. Симферополь, пер. Учебный, д. 8), профессор кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), главный научный сотрудник Южного федерального университета (344006, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42). SPIN-код: 8087-8998, ORCID, ResearcherID, ScopusID, solovievarc@gmail.com

Валерий Александрович Чебаненко, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории транспорта, композиционных материалов и конструкций федерального исследовательского центра «Южный научный центр Российской академии наук» (344006, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41), SPIN-код: 6487-3095, ORCID, ResearcherID, ScopusID, valera.chebanenko@yandex.ru

Павел Артурович Оганесян, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного Федерального университета (344058, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а), SPIN-код: 3870-0861, ORCID, ResearcherID, ScopusID, oganesyan@hey.com

Елизавета Ивановна Фоменко, магистрант кафедры математического моделирования института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного Федерального университета (344058, Российская Федерация, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а), SPIN-код: 6176-3556, ORCID, ScopusID, elfomenko@sfedu.ru

About the Authors:

Arkadiy N. Soloviev, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Mathematics and Physics Department, Crimean Engineering and Pedagogical University named after Fevzi Yakubov (8, Uchebnyi Lane, Simferopol), Professor of the Theoretical and Applied Mechanics Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), Chief Researcher, Southern Federal University (105/42, Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation), SPIN-code: 8087-8998, ORCID, ResearcherID, ScopusID, solovievarc@gmail.com

Valery A. Chebanenko, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory of Transport, Composite Materials and Structures, Southern Research Center, Russian Academy of Sciences (41, Chekhova Av., Rostov-on-Don, 344006, RF), SPIN-code: 6487-3095, ORCID, ResearcherID, ScopusID, valera.chebanenko@yandex.ru

Pavel A. Oganesyan, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Mathematical Modeling Department, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University (8a, Milchakova Str., Rostov-on-Don, 344058, Russian Federation), SPIN-code: 3870-0861, ORCID, ResearcherID, ScopusID, oganesyan@hey.com

Elizaveta I. Fomenko, graduate student of the Mathematical Modeling Department, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University (8a, Milchakova Str., Rostov-on-Don, 344058, Russian Federation), SPIN-code: 6176-3556, ORCID, ScopusID, elfomenko@sfedu.ru

Заявленный вклад авторов:

А.Н. Соловьев: постановка задачи, обзор литературы, цели и задачи исследования.

В.А. Чебаненко: вывод уравнений прикладной теории и проведение расчетов с их использованием, формирование выводов.

П.А. Оганесян: построение конечно элементной модели, формирование выводов.

Е.И. Фоменко: проведение расчетов в пакете ACELAN, доработка текста.

Claimed Contributorship:

AN Soloviev: task setting, literature review, research objectives and tasks.

VA Chebanenko: derivation of equations of the applied theory and performing the calculations using them, formulation of conclusions.

PA Oganesyan: building a finite element model, formulation of conclusions.

EI Fomenko: computational analysis in the ACELAN package, revision of the text.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

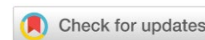
Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 15.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 27.03.2024
Принята к публикации / Accepted 01.04.2024

МЕХАНИКА
MECHANICS

УДК 624,078,82
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-159-169

Оригинальное теоретическое исследование

Упрощенный расчет момента инерции поперечного сечения консоли под нагрузкой


EDN: YAIWEZ

Е.Е. Дерюгин
Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, г. Томск, Российская Федерация
✉ dee@ispms.ru

Аннотация
Введение. Опубликованные исследования жесткости консолей под нагрузкой фокусируются на вопросах их деформации и разрушения. Описаны расчеты момента инерции — принципиально важной характеристики прочности стержня. Однако не решена проблема значительных затрат времени для таких вычислений. Представленное исследование восполняет данный пробел. Цель работы — описание нового быстрого метода аналитического расчета распределения напряжения сдвига в сечении консоли, соответствующего действию внешней приложенной силы. Впервые в таком контексте рассматриваются касательные напряжения и приводятся примеры расчета момента инерции для двух нестандартных сечений консоли.
Материалы и методы. Для создания нового метода консоль представили как пачку пластинок, ориентированных параллельно вектору внешней силы. Исходные расчеты строили по схеме консольной балки с выделенной пластинкой. Деформацию стержневых элементов моделировали с учетом действия однородного поля напряжения сдвига в сечении пластинки. Для обоснования упрощенного расчета момента инерции сечений задействовали схемы квадрата, эллипса, треугольника, шестиугольника, шестиконечной звезды и фигурного креста. Использовали аналитические и математические методы исследования, в частности теорему Гюйгенса–Штейнера.
Результаты исследования. Создан быстрый универсальный метод вычислений момента инерции поперечного сечения консоли под нагрузкой. Его отличие — отказ от расчетов для каждого сечения с учетом формы и других особенностей. При любой форме сечения балка представляется как пачка бесконечно тонких пластинок, моменты их инерции интегрируются, и используется известное решение для прогиба тонкой пластинки. Метод позволяет однозначно показать распределение касательных напряжений на торце консоли, обеспечивающих заданный прогиб, причем впервые для таких решений используются касательные напряжения. Получены их профили в зависимости от направления внешней приложенной силы. Впервые выведены формулы для моментов инерции сложных сечений — шестиконечной звезды и фигурного креста. Каждое сечение соотнесено с кривой распределения напряжения и его максимальным значением. Эти данные визуализированы в виде диаграмм. Установлено, что момент инерции и жесткость консоли не меняются при повороте внешней приложенной силы на 30° для сечения в виде звезды и на 45° — для квадрата и фигурного креста. В общем случае поле касательных зависит от геометрической формы и от ориентации сечения относительно внешней приложенной силы.
Обсуждение и заключение. Предложенный упрощенный подход к расчету момента инерции поперечных сечений консолей дает возможность однозначно определить поле касательных напряжений на торце, обеспечивающее при заданном прогибе соответствующее значение внешней приложенной силы. Инженеры и механики могут использовать результаты представленной работы при расчетах и моделировании деформации стержневых элементов конструкций.

Ключевые слова: деформация стержня, момент инерции плоской фигуры, момент инерции сложных сечений, упругий прогиб консоли, распределение касательных напряжений

Благодарности. Автор благодарит редакционную команду журнала и анонимных рецензентов за компетентную экспертизу и ценные рекомендации по улучшению статьи, которые позволили повысить ее качество.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FWRW–2021–0009. № ЕГИСУ НИОКТР 121031100276–2).

Для цитирования. Дерюгин Е.Е. Упрощенный расчет момента инерции поперечного сечения консоли под нагрузкой. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):159–169. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-159-169

Original Theoretical Research

Simplified Calculation of the Inertia Moment of the Cross Section of the Console under Loading

Evgeny E. Deryugin
Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Tomsk, Russian Federation
✉ dee@ispms.ru

Abstract

Introduction. Published studies on the rigidity of consoles under load focus on the issues of their deformation and destruction. Calculations of the inertia moment, fundamentally important characteristic of the strength of the rod, are described. However, the problem of significant time consumption for such calculations has not been solved. The presented study meets the lack. The objective of the work is to describe a new rapid method for analytical calculation of the shear stress distribution in the section of the console corresponding to the action of an external applied force. For the first time, tangential stresses are considered, and examples of calculating the inertia moment for two non-standard sections of the console are given in this context.

Materials and Methods. To develop a new method, the console was presented as a pack of plates oriented parallel to the vector of external force. The source calculations were based on the scheme of a console beam with a dedicated plate. The deformation of the rod elements was modeled taking into account the effect of a uniform shear stress field in the plate section. To validate the simplified calculation of the inertia moment of the sections, schemes of a square, ellipse, triangle, hexagon, six-pointed star, and a figured cross were used. Analytical and mathematical research methods were applied, specifically, the Huygens–Steiner theorem.

Results. A rapid valid method for calculating the inertia moment of the cross section of the console under loading has been developed. Its difference is the rejection of calculations for each section, taking into account the shape and other features. For any shape of the section, the beam is represented as a bundle of infinitely thin plates, their inertia moments are integrated, and a well-known solution for deflection of a thin plate is used. The method allows us to unambiguously show the distribution of tangential stresses at the end of the console, providing a given deflection, and tangential stresses are used for such solutions for the first time. Their profiles are obtained depending on the direction of the external applied force. Formulas for the inertia moments of complex sections — a six-pointed star and a figured cross — are derived for the first time. Each section is correlated with the stress distribution curve and its maximum value. This data is visualized in the form of diagrams. It is found that the inertia moment and the rigidity of the console do not change when the external applied force is rotated by 30° for a star-shaped section and by 45° for a square and a figured cross. In general, the tangent field depends on the geometry and on the orientation of the section relative to the external applied force.

Discussion and Conclusion. The proposed simplified approach to calculating the inertia moment of the cross sections of the consoles makes it possible to uniquely determine the field of tangential stresses at the end, which provides the appropriate value of the external applied force for the given deflection. Engineers and mechanics can use the results of the presented work in the calculations and modeling of deformation of rod structural elements.

Keywords: rod deformation, inertia moment of a flat figure, inertia moment of complex sections, elastic deflection of the console, shear stress distribution

Acknowledgements. The author would like to thank the Editorial team of the Journal and anonymous reviewers for their competent expertise and valuable recommendations for improving the quality of the article.

Funding Information. The research is done within the frame of the government task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic no. FWRW–2021–0009. USISU R&D No. 121031100276–2).

For Citation. Deryugin EE. Simplified Calculation of the Inertia Moment of the Cross Section of the Console under Loading. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):159–169. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-159-169

Введение. Многие строительные конструкции содержат элементы в виде стержней, которые в процессе изготовления или эксплуатации испытывают упругие деформации [1]. Прочность стержня или балки на изгиб определяет несущую способность конструкции [2]. Способность балки к упругой деформации характеризуется жесткостью, определяемой как отношение нагрузки P к упругому прогибу балки λ_e : $m_x = P / \lambda_e$ [3]. Как правило, в лабораторных условиях жесткость проверяют на консольной балке. Один ее конец заделывают в жесткое основание, а на другой действует внешняя сила, направленная перпендикулярно оси балки [4]. Моделирование и расчеты характеристик деформации и разрушения стержней, как правило, связаны с решением задачи о прогибе консольной балки, или консоли, под действием внешней приложенной силы [5]. При этом нет публикаций о простых и универсальных методах определения моментов инерции сложных сечений относительно действия внешней приложенной силы. Решение этой задачи описано в представленной статье.

Цель данной работы — создание универсального, быстрого метода расчета моментов инерции сложных сечений консоли под действием внешней приложенной силы. Новый подход позволяет аналитически узнавать распределение напряжения сдвига в сечении, соответствующее действию внешней приложенной силы. Отметим, что ранее в таких вычислениях не принимались во внимание касательные напряжения. Кроме того, впервые приводятся примеры расчета момента инерции для сложных фигурных сечений.

Материалы и методы. Во многих работах по сопротивлению материалов, например в [6], приводится универсальная формула для расчета упругого прогиба консоли, λ_e. Согласно этой формуле, жесткость консоли равна:

$$P/\lambda_e = 3EI_x / L^3, \tag{1}$$

где E — модуль Юнга; L — длина консоли; I_x — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси x, проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно приложенной силе P.

Из уравнения (1) следует, что принципиально важной характеристикой консоли является момент инерции сечения I_x, величина которого зависит от геометрической формы поперечного сечения балки и направления оси x [7]. Следует подчеркнуть, что в уравнении (1) момент инерции I_x относится к оси x, которая перпендикулярна направлению внешней приложенной силы P. В частности, момент инерции прямоугольного сечения $a\times b$ относительно оси симметрии x равен [8]:

$$I_x = ab^3/12. \tag{2}$$

Здесь a — толщина консоли; b — ее ширина. Сила P направлена параллельно стороне b прямоугольника.

Подставляя (2) в (1), получим известное уравнение для прогиба консоли прямоугольной формы [9]:

$$\lambda_e = \frac{4P}{Ea}\left(\frac{L}{b}\right)^3.$$

Поперечные сечения консольных балок, или консолей, бывают разными. На рис. 1 приведен простой пример консоли квадратного сечения под действием внешней силы P, направленной вдоль диагонали квадрата.

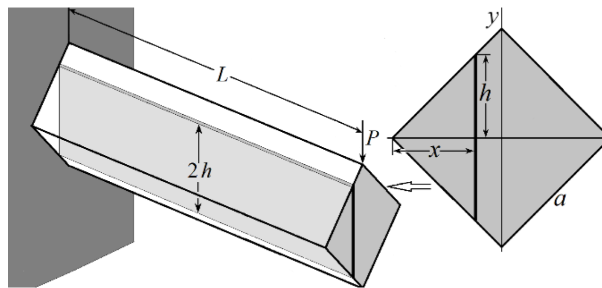


Рис. 1. Схема консольной балки с выделенной пластинкой

Моментом инерции сечения относительно оси x называется сумма, или интеграл, произведений элементарных площадок $ds = dxdy$ на квадраты расстояний y площадок до оси x: $I_x = \iint y^2 dxdy$. [10]. Подынтегральная функция, в сущности, является моментом инерции элементарной площадки $dxdy$ относительно оси x.

Консоль можно представить в виде пачки предельно тонких пластинок толщиной dx и длиной L, ориентированных параллельно вектору силы P. Под действием P все пластинки прогибаются на одну и ту же величину λ_e. При заданной ориентации сечения консоли отдельная пластинка не испытывает влияния деформации остального объема. Тогда момент инерции сечения консоли в целом будет определяться интегральной суммой моментов инерции сечений всех пластинок в пачке.

Проекция пластинки на плоскость поперечного сечения консоли представляет собой прямоугольную полоску толщиной dx и полудлиной h (рис. 1). Момент инерции сечения отдельной пластинки можно рассматривать как

момент инерции консоли прямоугольного сечения $2h \times dx$. По определению, к каждой пластинке в пачке применимо уравнение типа (2), где $a = dx$ и $b = 2h$. Согласно этому выражению, момент инерции полоски равен $dI_x = 2h^3(x)dx / 3$. Таким образом, момент инерции сечения консоли можно определить интегрированием моментов инерции не элементарных площадок, а элементарных полосок:

$$I_c = \frac{2}{3}\int_A^B h(x)^3\,dx, \tag{3}$$

где x изменяется в пределах от A до B.

Условие ориентации плоскости пластин параллельно вектору внешней приложенной силы важно, поскольку позволяет однозначно связать упругий прогиб консоли λ_e с распределением касательных напряжений в поперечном сечении консоли. Все пластинки в пачке прогибаются на одну и ту же величину λ_e. Согласно (1), $dI_x = 2h^3(x)dx / 3$. Значит, для пластинки толщиной dx потребуется элементарная сила $dP = 3l_eEdI_x / L^3 = 2l_eEh^3(x)dx / L^3$. Такая сила соответствует действию однородного поля напряжения сдвига в сечении пластинки $ds(x) = 2h(x)dx$:

$$\tau = dP / ds = \lambda_e E h^2(x) / L^3. \tag{4}$$

Из (4) видно, что значение напряжения τ в системе координат xy не зависит от координаты y.

Уравнение (4) удобно использовать при моделировании деформации стержневых элементов конструкции.

Интеграл (3) определяет момент инерции сечения I_c относительно оси x, проходящей через центр тяжести сечения. В случае несимметричных и сложных сечений удобно сначала найти момент инерции сечения или части сечения относительно оси, которая не проходит через центр тяжести сечения. Затем нужно перейти к моменту инерции сечения I_c относительно оси, которая проходит через центр тяжести сечения. Известно, что момент инерции сечения повторяет свойства момента инерции твердого тела и подчиняется теореме Гюйгенса–Штейнера [11]. Момент инерции сечения I_x относительно произвольной оси x равен сумме момента инерции этого сечения I_c относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения параллельно оси x, и произведения площади сечения S на квадрат расстояния a между осями: $I_x = I_c + a^2S$. Поэтому в общем случае можно записать:

$$I_x = \frac{2}{3}\int_A^B h(x)^3\,dx + a^2S = I_c + a^2S. \tag{5}$$

Если ось x проходит через центр тяжести сечения, то расстояние $a = 0$ и уравнение (5) переходит в (3).

Результаты исследования. Для создания простого, быстрого и универсального метода вычислений откажемся от расчетов для каждого сечения с учетом его формы и других особенностей. Именно такой подход впервые реализован в рамках данной научной работы. Каким бы сложным ни было сечение, достаточно использовать известное решение для прогиба тонкой пластинки, представить балку в виде пачки бесконечно тонких пластинок и проинтегрировать их моменты инерции. Кроме того, метод позволяет однозначно показать распределение касательных напряжений на торце консоли, обеспечивающих заданный прогиб. Подчеркнем, что касательные напряжения в таком контексте рассматриваются впервые.

Упрощенный расчет момента инерции простых сечений. Для обоснования предлагаемого метода рассмотрим известные сечения простой геометрической формы. Далее вместо выражения «момент инерции поперечного сечения консоли» используем термин «момент инерции». Будем считать, что внешняя приложенная сила всегда направлена перпендикулярно оси x, относительно которой определяется момент инерции сечения.

Квадрат. Уравнение (2) получено при условии, что вектор силы, приложенной к торцу консоли, перпендикулярен стороне a прямоугольника. При $b = a$ получим момент инерции квадратного сечения $I_c = a^4/12$.

Найдем предлагаемым методом момент инерции квадрата относительно оси x, которая параллельна не стороне, а диагонали квадрата (рис. 2 a).

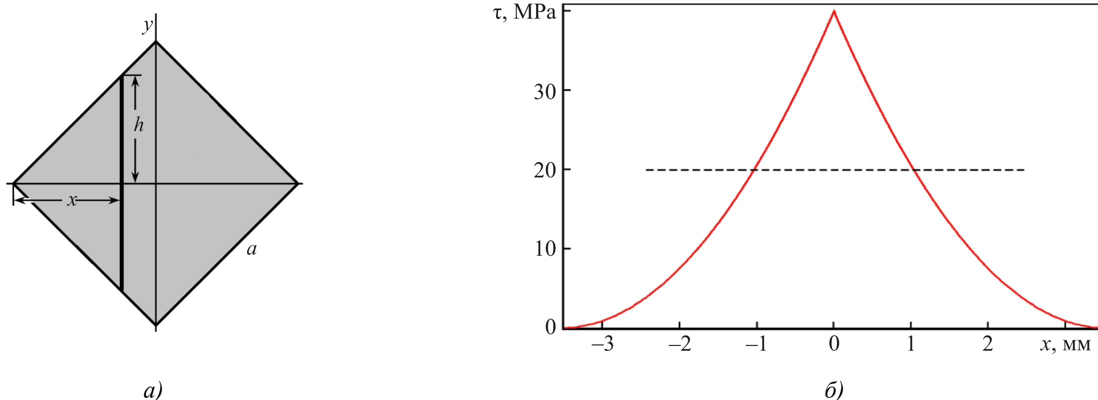


Рис. 2. Схема сечения в виде квадрата: a — сечение, $б$ — распределение напряжения τ вдоль оси x

Полудлина полоски на рис. 1 равна $h = x$. Из уравнения (3) находим:

$$I_c = \frac{2}{3}\int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} x^3 dx = \frac{a^4}{12}.$$

Видно, что поворот оси x на 45° не меняет момент инерции квадратного сечения. Следовательно, при повороте внешней приложенной силы на 45° не меняется и жесткость консоли (1).

Подставляя x в вместо h (4), получим распределение напряжения сдвига в сечении консоли квадратного сечения, соответствующее прогибу λ_e:

$$\tau(x) = \lambda_e x^2 E / L^3.$$

На рис. 2 *б* представлено распределение τ (x) вдоль диагонали квадрата при $\lambda_e = 2$ мм и $a = 5$ мм. Согласно (1), действие напряжения сдвига τ(x) на торце консоли из стали ($E = 200$ MPa) длиной $L = 50$ мм соответствует действию внешней приложенной силы $P = 0{,}25E\lambda_e a^4/L^3 = 500\ N$. Максимальное напряжение $\tau_{max} = 40$ MPa наблюдается на вертикальной диагонали квадрата. При отклонении от диагонали резко до нуля уменьшается напряжение τ. В результате в системе τ(x) образуется острый пик.

Напряжение τ зависит только от переменной x, поэтому по графику на рис. 2 *б* можно определить значение τ в любой точке квадрата.

Очевидно, что при ориентации силы перпендикулярно сторонам квадрата $\tau = P/a^2 = 20$ MPa (рис. 2 *б*, пунктирная линия). Как видно, распределение напряжения τ(x) в сечении, соответствующее внешней силе P, существенно зависит от ее направления.

Эллипс. На рис. 3 *а* приведена схема эллипса с полуосями a и b. Начало координат — в центре эллипса.

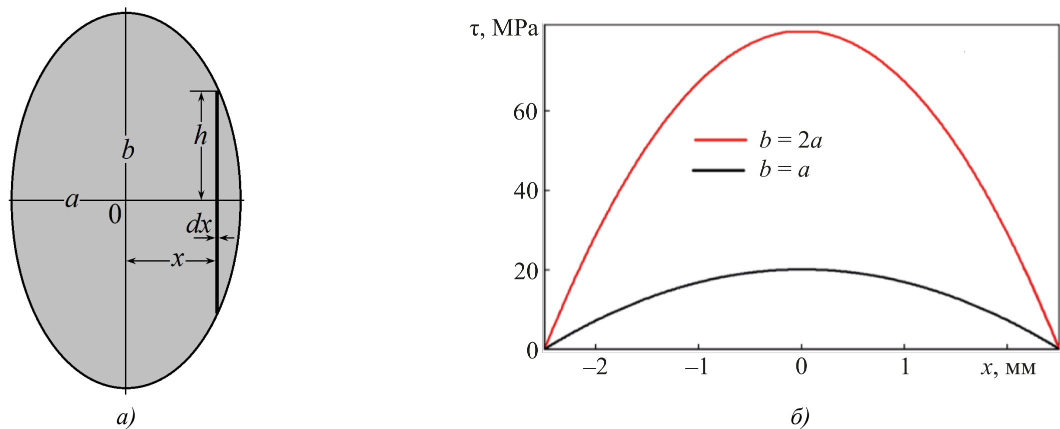


Рис. 3. Схема сечения в виде эллипса с полуосями *a* и *b:*
а — эллипс; *б* — распределения τ вдоль полуоси *a*. 1 — $a = b$, 2 — $b = 2a$, $a = 2{,}5$ мм

Из канонического уравнения эллипса [12] следует, что полоска, выделенная на рис. 3, имеет полудлину $h = b(a^2 - x^2)^{1/2} / a$. Подставляя эту величину в (3) и интегрируя от $-a$ до $+a$, получим момент инерции эллиптического сечения:

$$I_c = \frac{2}{3}\int_{-a}^{a} h^3 dx = \frac{2b^3}{3a^3}\int_{-a}^{a}\left[a^2 - x^2\right]^{3/2} dx = \frac{\pi a b^3}{4}. \quad (6)$$

При $a = b = r$ выведем момент инерции кругового сечения: $\pi r^4 / 4$, где r — радиус окружности.

Подставляя в (4) значение h, соответствующее эллипсу, получим следующее распределение напряжения сдвига в сечении консоли эллиптической формы:

$$\tau(x) = \lambda_e b^2 (1 - x^2 / a^2) E / L^3.$$

На рис. 3 *б* представлено распределение τ(x) вдоль полуоси $a = 2{,}5$ мм при $\lambda_e = 2$ мм, $E = 200$ MPa и $L = 50$ мм. При сравнении его с распределением τ(x) на рис. 2 *б* для квадрата очевидно существенное влияние геометрической формы сечения консоли на распределение напряжений. В случае эллиптического сечения на кривой τ(x) отсутствует острый пик. Максимальное напряжение τ_{max} наблюдается вдоль полуоси b. С учетом требования $\lambda_e = \text{const}$ можно говорить о быстром росте напряжения τ_{max} при увеличении отношения b/a. При увеличении полуоси b в два раза τ_{max} увеличивается в 4 раза (рис. 3 *б*).

Треугольник. Рассмотрим сечение в виде равнобедренного треугольника (рис. 4). Ось x направлена вдоль высоты треугольника (рис. 4 *а*). На расстоянии x от основания треугольника полудлина полоски равна $h = b(a - x) / 2a$.

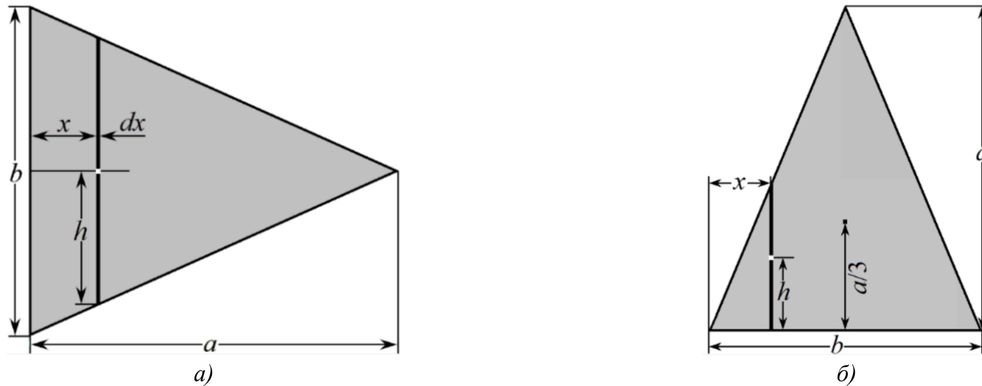


Рис. 4. Схема сечения в виде равнобедренного треугольника:
а — ось x, сила направлена параллельно основанию; *б* — сила направлена перпендикулярно основанию

Интегрирование выражения (4) по x от 0 до a определит следующую величину момента инерции:

$$I_c = \frac{b^3}{12a^3}\int_0^a (a-x)^3 dx = \frac{b^3 a}{48}. \qquad (7)$$

Рассмотрим случай, когда ось x проходит через центр тяжести и параллельна основанию треугольника (рис. 4 *б*).

Полоска на расстоянии x от левого угла треугольника имеет полудлину $h = x\sqrt{4a^2 / b^2 - 1} / 2$ (рис. 4 *б*). Центр тяжести полоски расположен на расстоянии h от основания треугольника (рис. 4 *б*). Следовательно, согласно теореме Гюйгенса–Штейнера для поперечного сечения, момент инерции полоски относительно основания треугольника равен:

$$dI_c = \frac{2}{3}h^3 dx + 2h^3 dx = \frac{8}{3}\frac{a^3}{b^3}x^3 dx.$$

Интегрирование полученного выражения по переменной x от $-b/2$ до $b/2$ определит момент инерции треугольника относительно основания:

$$I_x = a^3 b / 12. \qquad (8)$$

Центр тяжести треугольника расположен на расстоянии $a/3$ от основания. Согласно теореме Гюйгенса–Штейнера [13], момент инерции треугольника относительно собственного центра тяжести будет меньше (8) на величину:

$$I' = \left(\frac{a}{3}\right)^2 S = \frac{a^3 b}{18},$$

где $S = ab/2$ — площадь треугольника.

Следовательно, момент инерции треугольника относительно собственного центра тяжести равен:

$$I_c = \frac{a^3 b}{12} - \frac{a^3 b}{18} = \frac{a^3 b}{36}. \qquad (9)$$

Полученный результат в точности соответствует табличному значению момента инерции сечения относительно оси через центр тяжести, параллельной основанию треугольника.

На рис. 5 приведены распределения напряжения сдвига в треугольном сечении при $\lambda_e = 2$ мм для случаев, когда сила прогиба направлена вдоль основания (*а*) и вдоль высоты треугольника (*б*).

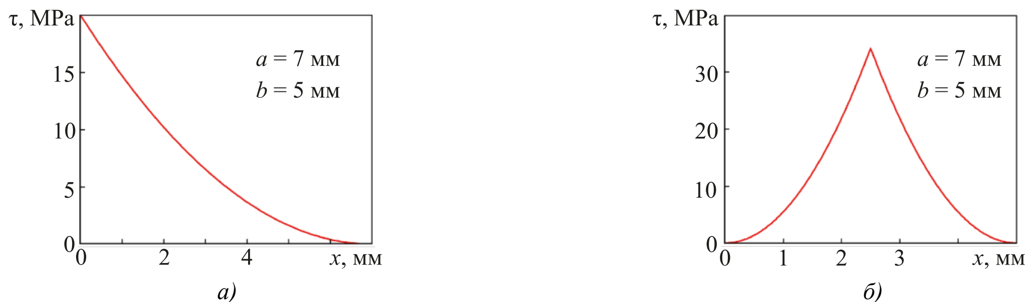


Рис. 5. Распределения τ в треугольном сечении: *а* — сила направлена вдоль основания;
б — сила направлена вдоль высоты треугольника

При ориентации треугольника как на рис. 4 *а* напряжение $\tau(x)$ плавно уменьшается от τ_{max} на основании до 0 на вершине (рис. 5 *а*). При ориентации треугольника как на рис. 4 *б* распределение $\tau(x)$ (рис. 5 *б*) подобно распределению для квадратного сечения, когда сила ориентирована вдоль диагонали (рис. 2 *б*).

Правильный шестиугольник. На рис. 6 представлены две ориентации шестиугольника относительно оси *x*: параллельно (*а*) и перпендикулярно (*б*) его диагонали.



Рис. 6. Правильный шестиугольник:
а — диагональ перпендикулярна вектору силы; *б* — диагональ параллельна вектору силы

Сечение шестиугольника на рис. 6 *а* состоит из:

– прямоугольника шириной *a* и высотой $a\sqrt{3}$;

– двух равнобедренных треугольников высотой $a/2$ и с основанием $a\sqrt{3}$.

Найдем моменты инерции указанных частей сечения по (2) для прямоугольника и по (7) для треугольников. Для прямоугольника в уравнении (2) $b = a\sqrt{3}$, поэтому его момент инерции равен $I_{x1} = \sqrt{3}a^4/4$. Для треугольных частей в уравнении (7) основание равно $b = a\sqrt{3}$, а высота $a/2$. Следовательно, момент инерции шестиугольника:

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \sqrt{3}a^4\left(1/14 + 1/16\right) = 5\sqrt{3}a^4/16. \quad (10)$$

Если приложенная сила направлена вдоль диагонали шестиугольника (рис. 6 *б*), то полудлина полоски равна $a/2 - x/\sqrt{3}$. Совершив соответствующие замены в (4), получим:

$$I_c = \frac{2}{3}\int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}/2} (a - x/\sqrt{3})^3 dx = \frac{5\sqrt{3}a^4}{16}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), убеждаемся, что поворот шестиугольника на 30° не влияет на его момент инерции относительно оси *x*.

Рассмотрим случай ориентации шестиугольника как на рис. 6 *а*. При $\lambda = 2$ мм и $E = 200$ MPa в интервале от $-a/2$ до $+a/2$ напряжение $\tau(x)$ будет постоянным и равно $\tau_{max} = 15$ MPa (рис. 7 *а*). При тех же условиях и ориентации шестиугольника как на рис. 6 *б* распределение $\tau(x)$ подобно распределению для квадратного сечения (рис. 2 *б*). Однако здесь $\tau_{max} = 20$ MPa и $\tau_{min} = 5$ MPa (рис. 7 *б*).

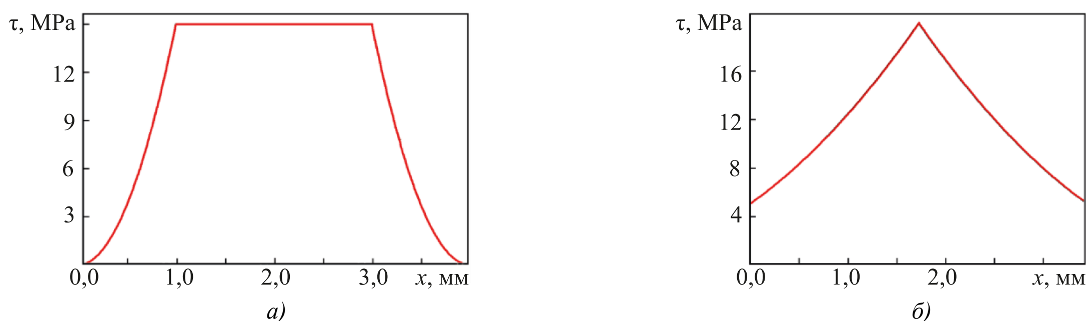


Рис. 7. Распределение τ(x) в сечении правильного шестиугольника:
а — диагональ перпендикулярна вектору силы; *б* — диагональ параллельна вектору силы

Примеры упрощенного расчета момента инерции сложных сечений

Шестиконечная звезда. Рассчитаем предлагаемым методом момент инерции нестандартного сечения в виде правильной 6-конечной звезды со стороной *a*. Для определения момента инерции относительно малой диагонали звезды воспользуемся схемой на рис. 8 *а*. Выделим на схеме три зоны: зону I шириной $a/2$, зону II для остальной части полфигуры и примыкающую к ней вспомогательную зону III в виде треугольника.

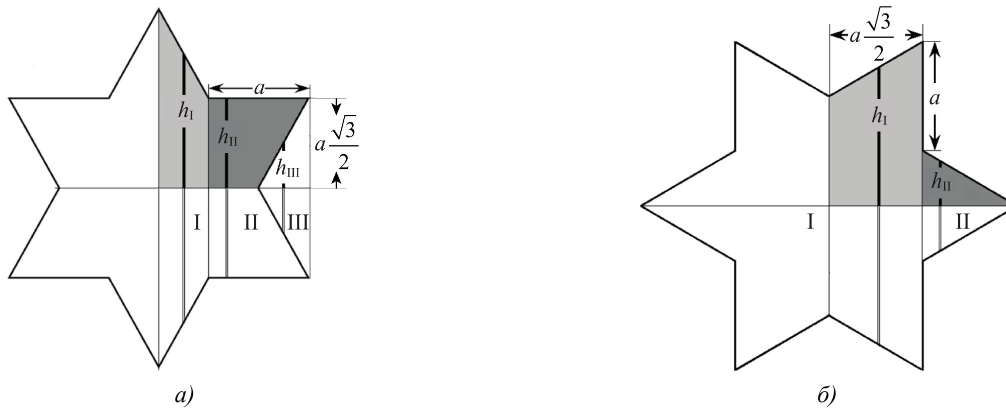


Рис. 8. К расчету момента инерции шестиконечной звезды относительно:
а — малой диагонали; *б* — большой диагонали

Полудлина полоски в зоне I на расстоянии x от диагонали равна $h_I = \sqrt{3}(a - x)$. Используя выражение (3), для двух зон I на рис. 6 *а* получим момент инерции:

$$I_{xI} = 2\sqrt{3}\int_{a/2}^{a/2}(a-x)^3 dx = \frac{15\cdot\sqrt{3}}{16}a^4.$$

Момент инерции зоны II равен моменту инерции прямоугольника высотой $a\sqrt{3}$ и шириной a без момента инерции треугольника III. Полудлина полоски в прямоугольнике равна $h_{II} = a\sqrt{3}/2$. Из уравнения (3) находим момент инерции прямоугольника:

$$I_{II+III} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^4.$$

Полудлина полоски в треугольнике равна $h_{III} = x\sqrt{3}$. Согласно (4), момент инерции треугольника равен:

$$I_{III} = \frac{\sqrt{3}}{32}a^4.$$

Следовательно, момент инерции зоны II равен:

$$I_{II} = I_{II+III} - I_{III} = \frac{7\sqrt{3}}{32}a^4.$$

Удвоенная сумма моментов инерции зон I и II определит момент инерции 6-конечной звезды:

$$I_{xI} = \frac{11\cdot\sqrt{3}}{8}a^4. \quad (12)$$

Для определения момента инерции звезды относительно большой диагонали следует воспользоваться схемой на рис. 8 *б*, где выделены две зоны. Полудлина полоски в зоне I равна $h_I = a + x/\sqrt{3}$, в зоне II $h_{II} = a/2 - x/\sqrt{3}$. Из (3) вычисляются моменты инерции зон I ($I_{xI} = a^4 65\sqrt{3}/96$) и II ($I_{xII} = a^4\sqrt{3}/96$). Можно убедиться, что удвоенная сумма моментов инерции зон I и II в точности соответствует уравнению (12). Следовательно, момент инерции 6-конечной звезды относительно большой и малой диагоналей одинаков.

На рис. 9 *а* показано распределение напряжения сдвига в сечении 6-угольной звезды, соответствующее $\lambda = 2$ мм и ориентации внешней приложенной силы согласно рис. 8 *а*. Вдоль вертикальной оси звезды напряжение принимает максимальное значение $\tau_{max} = 37{,}5$ MPa. По мере удаления от оси вправо τ быстро падает до уровня $\tau = 9{,}375$ MPa и остается постоянным в интервале $2 \le x \le 4$ мм. Затем τ падает до нуля. При удалении от оси влево τ меняется аналогично.

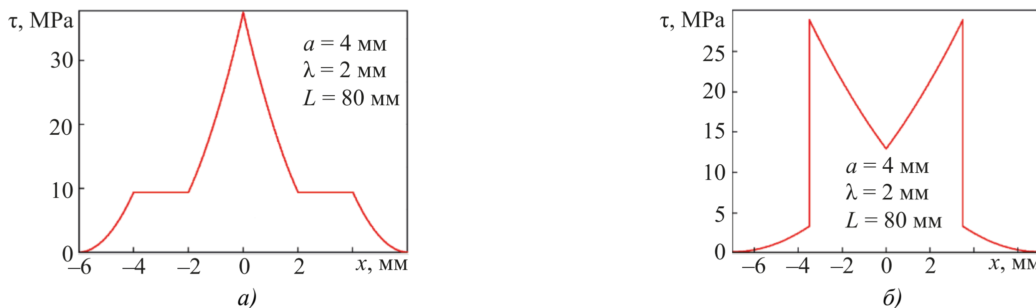


Рис. 9. Распределения τ в 6-угольном сечении: *а* — сила направлена вдоль большой диагонали;
б — сила на правлена вдоль малой диагонали

При повороте звезды на 30° распределение напряжения τ существенно меняется, приобретая очертания ласточкиного хвоста (рис. 9 *б*). Наблюдаются два пика со значением τ_{max} = 28,12 MPa. Картина распределения симметрична. Однако при удалении от оси симметрии напряжение сначала увеличивается от 12,5 до 28,12 MPa, а затем падает до 3,125 MPa. В связи с этим на зависимости $\tau(x)$ наблюдаются два пика. Далее напряжения быстро уменьшается до нуля.

Фигурный крест. Рассмотрим решение для момента инерции нестандартного сечения в виде фигурного креста (рис. 10), каждая сторона которого является четвертой частью окружности радиуса *R*. Расстояние между вершинами фигуры равно $R\sqrt{2}$. Найдем сначала момент инерции креста относительно большой диагонали (рис. 10 *а*).

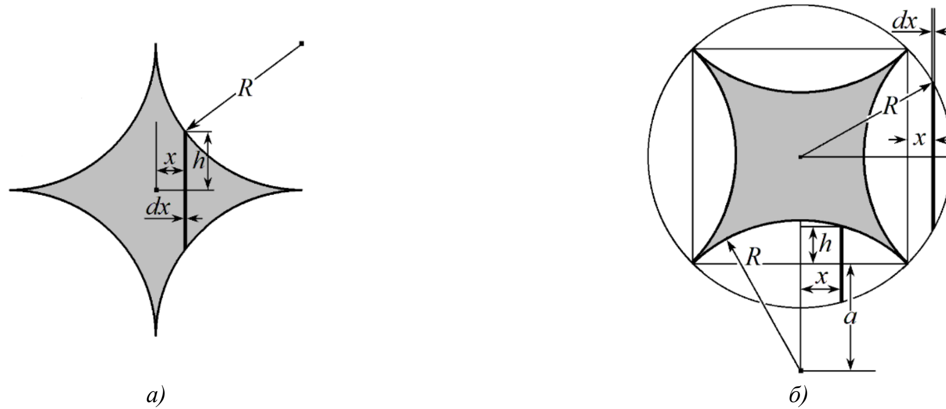


Рис. 10. Фигурный крест: *а* — сила направлена вдоль диагонали креста;
б — сила направленна под углом 45° к диагонали креста

Половина длины полоски *h* на рис. 10 *а* равна

$$h = R - \sqrt{R^2-(R-x)^2}.$$

Учитывая симметрию и используя уравнение (3), получим следующее значение момента инерции сечения фигурного креста:

$$I_x = \frac{4}{3}\int_0^R \left[R-\sqrt{x(2R-x)}\right]^3 dx = \left[4-5\pi/4\right]R^4. \qquad (13)$$

Определим момент инерции креста при повороте его на 45° относительно оси *x* (рис. 10 *б*).

Фигурный крест вписывается в окружность радиуса *R*. Из рис. 10 *б* видно, что вокруг креста выделяются четыре фигуры в виде овала с острыми углами. Для определения момента инерции креста достаточно из момента инерции круга вычесть моменты инерции четырех овалов.

Из (6) следует, что момент инерции круга равен:

$$I_{x0} = \pi R^4/4.$$

Определим моменты инерции овалов относительно центра тяжести креста.

Момент инерции овала справа равен моменту инерции овала слева. Полувысота полоски у овала слева:

$$h_1 = \sqrt{R^2-(R-x)^2}.$$

Учтем уравнение (3), а также симметричность данных частей и их расположения. Интегрированием от 0 до $R - R/\sqrt{2}$ получим следующее значение момента инерции данных двух частей:

$$I_{x1} = \frac{8R^3}{3}\int_0^{R(1-1/\sqrt{2})}\left[\sqrt{1-(1-x/R)^2}\right]^3 dx = \frac{R^4}{3}\left[\frac{3\pi}{4}-2\right]. \qquad (14)$$

Центры тяжести овалов сверху и снизу окружности расположены на расстоянии $a = R/\sqrt{2}$ от центра тяжести целой фигуры. Площадь этих двух частей равна $S = R^2(\pi - 2)$.

По (4) вычислим момент инерции данной пары:

$$I_{x2} = a^2 S = R^4\left[\pi/2-1\right].$$

Величина *h* в (3), согласно рис. 10 *б*, (овал внизу круга) равна $h=\sqrt{2a^2-x^2}-a$. Следовательно, для пары овалов сверху и снизу круга можно записать момент инерции относительно собственных центров тяжести:

$$I_{x3} = \frac{8}{3}R^3\int_0^{R/\sqrt{2}}\left[\sqrt{1-(x/R)^2}-1/\sqrt{2}\right]^3 dx = R^4\left[3\pi/4-7/3\right]. \qquad (15)$$

Определим результирующий момент инерции фигурного креста. Для этого из момента инерции (13) круга вычтем моменты инерции четырех овалов:

$$I_{x0} - I_{x1} - I_{x2} - 2I_{x3} = [4 - 5\pi/4]R^4.$$

Сравнивая полученный результат с результатом (13), убеждаемся, что момент инерции данного крестообразного сечения консоли не меняется при повороте оси *x* на 45°.

На рис. 11 *а* показано распределение напряжения сдвига в сечении фигурного креста, соответствующее λ = 2 мм и действию внешней приложенной силы вдоль оси креста (рис. 10 *а*). На вертикальной оси креста наблюдается острый пик напряжения, где τ_{max} = 80,0 MPa.

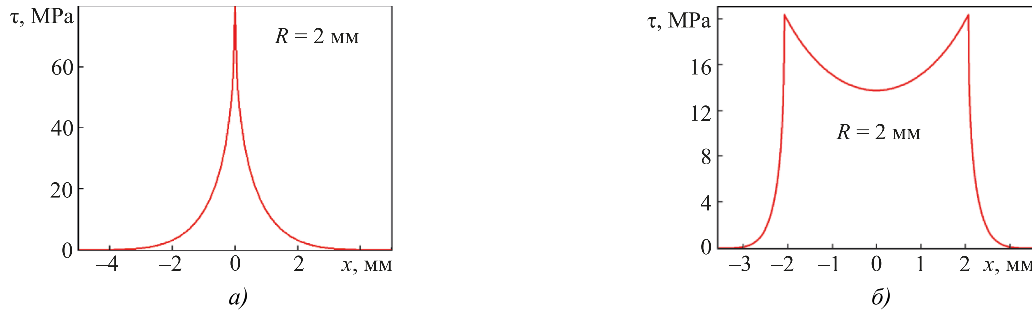


Рис. 11. Распределения τ в сечении фигурного креста: *а* — сила направлена вдоль диагонали креста; *б* — сила направлена под углом 45° к диагонали креста

При повороте креста относительно приложенной силы на 45° распределение напряжения τ существенно меняется. По мере отклонения оси симметрии напряжение сначала плавно увеличивается с τ = 13,73 MPa до τ_{max} = 20,32 MPa. Затем напряжение τ резко падает до нуля. Поэтому в распределении τ наблюдается два симметричных пика (рис. 11 *б*) на расстоянии 2 мм от оси симметрии.

Обсуждение и заключение. Предложенный упрощенный метод расчета позволяет быстро узнать моменты инерции сложных поперечных сечений консоли. При этом однозначно определяется поле напряжения сдвига в сечении образца, соответствующее действию внешней приложенной силы. Кроме того, показано, что распределение напряжений в сечении качественно и количественно зависит от ориентации сечения относительно направления внешней приложенной силы.

Для обоснования метода проведены вычисления моментов инерции не только для известных сечений простой геометрической формы (которые показали абсолютную идентичность расчетных и опубликованных в литературе результатов), но и для двух новых сложных сечений в виде правильной шестиконечной звезды и фигурного креста. Показано, что жесткость консоли не меняется при повороте внешней силы, приложенной перпендикулярно оси симметрии, на 30° для сечения в виде 6-конечной звезды, и на 45° — для квадрата и фигурного креста. Метод и полученные решения могут быть использованы инженерами и механиками при моделировании и расчетах прочности и жесткости стержневых элементов конструкций.

Список литературы / References

1. Ching Francis DK, Onouye B, Zuberbuhler D. *Building Structures Illustrated: Patterns, Systems, and Design*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2014. 352 p. URL: https://zlib.pub/book/building-structures-illustrated-1rgfde22jln8 (accessed: 22.02.2024).

2. Hallebrand E, Jakobsson W. *Structural Design of High-Rise Buildings*. Lund: Media-Tryck LU; 2016. 142 p.

3. Amany D, Pasini A. Material and Shape Selection for Stiff Beams under Non-Uniform Flexure. *Materials and Design*. 2009;30(4):1110–1117. http://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.06.029

4. Pilkey WD. *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2005. 1536 p.

5. Гайджуров П.П., Савельева Н.А. Применение метода двойной аппроксимации для построения матриц жесткости объемных конечных элементов. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(4):365–375. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375

Gaidzhurov PP, Saveleva NA. Application of the Double Approximation Method for Constructing Stiffness Matrices of Volumetric Finite Elements. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(4):365–375. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-4-365-375

6. Murakami Y. *Theory of Elasticity and Stress Concentration*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons; 2016. 480 p. URL: https://www.wiley.com/en-us/Theory+of+Elasticity+and+Stress+Concentration-p-9781119274100 (accessed: 22.02.2024).

7. Bechtel FK. Estimating Local Compliance in a Beam from Bending Measurements. Part I. Computing "Span Function". *Wood and Fiber Science*. 2007;39(2):250–259. URL: https://wfs.swst.org/index.php/wfs/article/view/1344/1344 (accessed: 22.02.2024).

8. Bhattacharjya RK. *Engineering Mechanics*. New Delhi: Oxford University Press; 2009. 832 p.

9. Damkilde L. *Stress and Stiffness Analysis of Beam Sections*. Copenhagen: Technical University of Denmark; 2000. 36 p.

10. Жернаков В.С. *Сопротивление материалов — механика материалов и конструкций.* Уфа: Уфимский государственный авиационный технический университет; 2012. 495 с. URL: https://mircompozitov.ucoz.ru/_ld/3/306_Zhernakov.pdf (дата обращения: 22.02.2024).

Zhernakov VS. *Material Resistance — Mechanics of Materials and Structures*. UFA: Ufa State Aviation Technical University; 2000. 36 p. (In Russ.).

11. Kleppner D, Kolenkow R. *An Introduction to Mechanics*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2014. 566 p.

12. Паньженский В.И., Сурина О.П., Сорокина М.В. *Аналитическая геометрия на плоскости*. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета; 2020. 120 с.

Pan'zhenskii VI, Surina OP, Sorokina MV. *Plane Analytic Geometry.* Penza: Penza State University; 2020. 120 p. (In Russ.).

13. Brown RG. *Introductory Physics I. Elementary Mechanics.* Durham: Duke University Physics Department; 2013. 661 p.

Об авторе:

Евгений Евгеньевич Дерюгин, доктор физико-математических наук, профессор лаборатории физической мезомеханики и неразрушающих методов контроля института физики прочности и материаловедения Сибирского Отделения Российской академии наук, (534055, Российская Федерация, г. Томск, Академический пр., 2/4), SPIN-код: 6587-3002, ORCID, ScopusID, dee@ispms.tsc.ru

About the Author:

Evgeny E. Deryugin, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher of the Laboratory of Physical Mesomechanics and Non-Destructive Testing Methods, Institute of Strength Physics and Material Science, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (2/4, Akademicheskii Ave., Tomsk, 634055, Russian Federation), SPIN-code: 6587-3002, ORCID, ScopusID, dee@ispms.tsc.ru

Конфликт интересов: **автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

Conflict of Interest Statement: **the author declares no conflict of interest.**

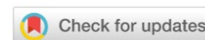
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

All author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 20.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 12.04.2024
Принята к публикации / Accepted 16.04.2024

МЕХАНИКА
MECHANICS





УДК 539.3
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-170-177

Оригинальное теоретическое исследование

Разработка метода решения задачи деформации ледяного покрова под действием произвольно движущейся нагрузки



EDN: ZASIUO

А.В. Галабурдин
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ 5339850@mail.ru

Аннотация
Введение. Освоение полярных районов Мирового океана, необходимость решения различных задач, связанных с наличием большого числа замерзающих внутренних водоемов, ставят перед наукой новые проблемы. К их числу относится проблема изучения поведения ледяного покрова под воздействием на него различного вида нагрузок. Большой интерес представляет рассмотрение задач о действии на ледяной покров подвижной нагрузки. Подвижная нагрузка моделирует действие на лед движущихся транспортных средств. Однако в работах, посвященных вышеуказанным задачам, рассматриваются случаи движения нагрузки по прямолинейной траектории. Целью данной работы является разработка метода исследования поведения ледяного покрова под действием нагрузки, перемещающейся произвольным образом.

Материалы и методы. В статье предложен метод решения задачи о действии на ледяной покров водоема конечной глубины движущейся по произвольной траектории силы. Задача сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений. Первое из них моделирует поведение ледяного покрова и является уравнением колебаний вязкоупругой пластины. Второе — моделирует поведение жидкости, находящейся в состоянии потенциального течения, и является уравнением Лапласа. Для решения системы дифференциальных уравнений применялись интегральные преобразования по временной и пространственным переменным. Полученное в результате решение выражалось через повторный интеграл, для вычисления которого применялись численные методы.

Результаты исследования. В результате реализации предложенного метода получено решение задачи о движении сосредоточенной силы по ледяному покрову по произвольному закону. При этом произведены исследования характера поведения перемещений и напряжений в ледяном покрове в зависимости от скорости и ускорения движения вертикальной нагрузки, глубины водоема и вязкоупругих свойств льда. Кроме того, рассчитано распределение вектора скорости частиц жидкости по глубине водоема.

Обсуждение и заключение. Предложенный метод является весьма эффективным для решения задач о подвижных нагрузках, действующих на ледяной покров водоема конечной глубины. Он позволяет решать задачи о действии нагрузки, движущейся по ледяному покрову по сложной траектории. Полученные результаты могут быть использованы для расчета напряжения и перемещений ледового покрова при прокладке ледовых дорог или строительстве аэродромов на льду.

Ключевые слова: бесконечный ледяной покров, движущаяся нагрузка, произвольная траектория, переменная скорость

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензентам за указанные замечания, которые позволили повысить качество статьи.

Для цитирования. Галабурдин А.В. Разработка метода решения задачи деформации ледяного покрова под действием произвольно движущейся нагрузки. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):170–177. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-170-177

Original Theoretical Research

On the Method for Solving the Problem of Ice Cover Deformation under an Arbitrary Moving Load

Alexander V. Galaburdin
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ 5339850@mail.ru

Abstract

Introduction. The development of the polar areas of the World Ocean and the need to solve various problems associated with a large number of freezing inland water bodies issue new challenges for science. These challenges include the problem of studying the behavior of ice cover when exposed to various types of loads. Of great interest is the consideration of problems about the action of a moving load on the ice cover. A moving load simulates the effect of moving vehicles on ice. However, in papers devoted to the above problems, cases of load movement along a straight-line trajectory are considered. The objective of this research is to develop a method for studying the behavior of ice cover under the action of a load moving arbitrarily.

Materials and Methods. The article proposes a method for solving the problem of the action of a force moving along an arbitrary trajectory on the ice cover of a reservoir of finite depth. The problem amounts to solving a system of two differential equations. The first of them models the behavior of the ice cover, and it is the equation of vibrations of a viscoelastic plate. The second equation simulates the behavior of fluid in a state of potential flow, and it is Laplace's equation. To solve the system of differential equations, integral transformations in time, space and variables were used. The resulting solution was expressed through an iterated integral, which was calculated using numerical methods.

Results. The development and implementation of the method resulted in solving the problem of the movement of a concentrated force along an ice cover according to an arbitrary law. At the same time, studies were carried out on the behavior of displacements and stresses in the ice cover depending on the speed and acceleration of the movement of the vertical load, on the depth of the reservoir, and on the viscoelastic properties of ice. In addition, the distribution of the velocity vector of fluid particles along the depth of the reservoir was calculated.

Discussion and Conclusion. The proposed method is very effective for solving problems of moving loads acting on the ice cover of a reservoir of finite depth. It provides solving problems about the action of a load moving along an ice cover along a complex trajectory. The results obtained can be used to calculate the stress and displacement of the ice cover during the laying of ice roads or the construction of airfields on the ice.

Keywords: infinite ice cover, moving load, arbitrary trajectory, variable speed

Acknowledgements. The author would like to thank the reviewers for the comments which made it possible to improve the quality of the article.

For citation. Galaburdin AV. On the Method for Solving the Problem of Ice Cover Deformation under an Arbitrary Moving Load. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):170–177. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-170-177

Введение. Освоение полярных районов Мирового океана и наличие большого количества замерзающих внутренних водоемов приводят к необходимости изучения полей перемещений и напряжений ледяного покрова, обусловленных действием различного вида нагрузок. Решению этих проблем посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых. Ранее было установлено, что механические свойства льда зависят от солености воды и его температуры. Большое внимание уделялось разработке численных моделей льда, которые достаточно точно отражали взаимодействие льда и идеальной несжимаемой жидкости. В работах [1, 2] для этого применялся метод гидродинамики сглаженных частиц, в [3, 4] — метод дискретных элементов. В статье [5] лед моделируется упругой пластиной, лежащей на поверхности стратифицированной жидкости. Модели, допускающие наличие трещин, рассматривались в работах [6, 7]. Модели льда, усиленного армирующими элементами, представлены в работах [8, 9].

При этом в некоторых работах ледяной покров рассматривается как упругая пластина, лежащая на поверхности водоема [10, 11]. В то же время в [12] на основе приведенных исследований делается вывод о том, что в некоторых случаях свойства льда лучше всего описывает реологическая модель Кельвина-Фойгта с одним параметром (временем затухания). Поэтому многие исследователи при моделировании ледового покрова применяют вязкоупругую пластину [13]. В [14] для описания свойств льда применялись нелинейные модели.

В некоторых работах рассматривалось действие на ледяной покров подвижной нагрузки. В [15] исследовалось действие подвижной нагрузки на ледяной покров в замороженном канале, в [16] рассматривалось действие на ледяной покров нагрузки с импульсивным характером движения. Работа [17] посвящена изучению нагрузки, движущейся по замерзшему руслу. При этом исследовалось прямолинейное движение нагрузки [18]. Однако в реальных условиях часто приходится иметь дело с нагрузкой, перемещающейся более сложным образом. Поэтому целью данной работы явилась разработка метода решения задач о действии нагрузки, движущейся по ледяному покрову по сложной траектории. Это позволит более точно исследовать действие на лед транспортных средств, движущихся сложным образом.

Данная работа является продолжением исследований, связанных с рассмотрением задач о действии подвижной нагрузки на различные объекты, результаты которых представлены в работах [19, 20].

Материалы и методы. Постановка задачи. Рассматривается водоем конечной глубины с бесконечным ледяным покровом (бесконечная пластина), который подвержен действию вертикальной силы, движущейся произвольным образом — импульсивно. Предполагается, что жидкость водоема несжимаема и совершает потенциальное движение.

Задача сводится к системе дифференциальных уравнений [15]:

$$\left(1+\tau_0\partial_t\right)\Delta_0^2W + c^{-2}\partial_t^2W + kW + b\partial_t F\Big|_{z=0} = \frac{Q\left(x,y,t\right)}{D},$$

$$\Delta F = 0,$$

где $W(x, y, t)$ — прогиб ледяного покрова; E и μ — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда; $D = E h^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость на изгиб; h — толщина ледяного покрова; τ_o — время релаксации деформаций; $\Delta_o{}^2 = (\partial_x{}^2 + \partial_y{}^2)^2$; $\Delta = \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2 + \partial_z{}^2$; $\rho_л$ и $\rho_в$ — соответственно плотность льда и воды; $c^{-2} = \rho_л h/D$; $k = \rho_в g/D$; $b = \rho_в/D$; $Q(x, y, t)$ — действующая на поверхности льда нагрузка; $F(x, y, z, t)$ — потенциал скорости.

При краевых условиях при z=0 (граница лед-вода):

$$\partial_t W = \partial_z F.$$

На дне водоема при $z = -H$:

$$\partial_z F = 0.$$

Кроме того, предполагалось, что ледяной покров и жидкость в водоеме в начальный момент времени находились в состоянии покоя. Нагрузка представляла собой сосредоточенную единичную силу (величиной в один Ньютон) $Q(x, y, t)$, которая перемещалась произвольно по незамкнутой кривой γ произвольной формы. Полагалось, что перемещение силы задавалось в виде $Q = Q(s(t))$, где s — дуговая координата, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки траектории γ. Траектория движения задавалась параметрически в виде $\begin{cases} x = x_0\left(t\right) \\ y = y_0\left(t\right) \end{cases}$,

где t — время.

Подвижная нагрузка аппроксимировалась выражением

$$Q\left(x,y,t\right) = \varepsilon^2\, exp\left(-\varepsilon^2\left(\left(x-x_0\left(t\right)\right)^2+\left(y-y_0\left(t\right)\right)^2\right)\right)\Big/\pi,$$

где ε — числовой параметр.

После применения интегрального преобразования Фурье по переменным x и y, интегрального преобразования Лапласа по t, были получены формулы для вычисления неизвестных функций W и F:

$$W\left(x,y,t\right) = \frac{1}{2\pi D}\int_0^t\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/4\varepsilon^2} J_0\left(pR\left(t-\tau\right)\right)\frac{1}{\gamma}\left[e^{-(a-d)\tau}-e^{-(a+d)\tau}\right]dpd\tau,$$

$$F\left(x,y,z,t\right) = \frac{1}{2\pi D}\int_0^t\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/4\varepsilon^2} J_0\left(pR\left(t-\tau\right)\right)\frac{ch\left(p\left(z+H\right)\right)}{sh\left(pH\right)},$$

$$W\left(x,y,t\right) = \frac{1}{2\pi D}\int_0^t\int_0^\infty p^2 e^{-p^2/4\varepsilon^2} J_0\left(pR\left(t-\tau\right)\right)\frac{1}{\gamma}\left[e^{-(a-d)\tau}-e^{-(a+d)\tau}\right]dpd\tau,$$

$$\left[\left(a+d\right)e^{-(a+d)\tau}-\left(a-d\right)e^{-(a-d)\tau}\right]dpd\tau,$$

$$R^2\left(\tau\right) = \delta^2+\beta^2,\ \delta = x_0\left(\tau\right)-x,\ \beta = y_0\left(\tau\right)-y,$$

$$\gamma=\left[\tau_0^2 p^{10}-4\left(c^{-2}p^2+bpcth\left(pH\right)\right)\left(p^4+k\right)\right]^{1/2},\ a=\frac{\tau_0 p^5}{2\left(c^{-2}p+bcth\left(pH\right)\right)},$$

$$d=\frac{\gamma}{2\left(c^{-2}p+bcth\left(pH\right)\right)}.$$

Используя известные соотношения из теории тонких пластин и теории потенциального течения идеальной жидкости, можно получить соотношения для вычисления перемещений и напряжений в ледовом покрове, а также компонент вектора скорости частиц жидкости.

При вычислении несобственного интеграла с помощью численных методов использовалось приближенное соотношение $\int_0^{\infty} f\left(p\right)dp\approx\int_0^{A} f\left(p\right)dp$, в котором величина А выбиралась настолько большой, чтобы оценка ошибки $\left|\int_A^{\infty} f\left(p\right)dp\right|$ не превышала установленного значения.

Так, для величины прогиба льда

$$W\left(x,y,t\right)=\frac{1}{2\pi D}\int\limits_0^t\int\limits_0^{\infty}U_0\left(\tau,p\right)dpd\tau=\frac{1}{2\pi D}\int\limits_0^t\int\limits_0^{A}U_0\left(\tau,p\right)dpd\tau+\frac{1}{2\pi D}\int\limits_0^t\int\limits_A^{\infty}U_0\left(\tau,p\right)dpd\tau,$$

данная оценка имеет вид:

$$\left|\frac{1}{2\pi D}\int\limits_0^t\int\limits_A^{\infty}U_0\left(\tau,p\right)dpd\tau\right|\le\frac{2A\varepsilon^2}{\pi D\gamma\left(A\right)}e^{A^2/4\varepsilon^2},$$

$$\gamma\left(A\right)=\left[\tau_0^2 A^{10}-4\left(c^{-2}A^2+bActh\left(AH\right)\right)\left(A^4+k\right)\right]^{1/2}.$$

Подобные оценки можно получить и для остальных вычисляемых величин. Эти оценки использовались при определении величины *A*.

В проведенных расчетах величина *A* выбиралась такой, чтобы оценка $\frac{2A\varepsilon^2}{\pi D\gamma(A)}e^{A^2/4\varepsilon^2}$ не превышала $\left|\frac{1}{2\pi D}\int_0^t\int_A^{\infty}U_0\left(\tau,p\right)dpd\tau\right|$ 0,001.

При вычислении повторного интеграла использовались квадратурная формула Симпсона (по переменной τ) и квадратурная формула Чебышева с равными весами для двух узлов (по переменной *p*). Аналогичным образом вычислялись и остальные величины.

Результаты исследования. Разработан метод решения задач о действии нагрузки, движущейся по ледяному покрову водоема, наполненного идеальной жидкостью, по сложной траектории с переменной скоростью. Применяя данный метод, проведены расчеты, которые показали степень влияния различных параметров на деформацию ледяного покрова.

Изложенный метод не накладывает ограничений на форму траектории движения сосредоточенной силы. При расчетах рассматривался частный случай траектории, состоящей из дуг окружностей (рис. 1). Красной точкой указано положение сосредоточенной силы в рассматриваемый момент времени и направление движения силы.

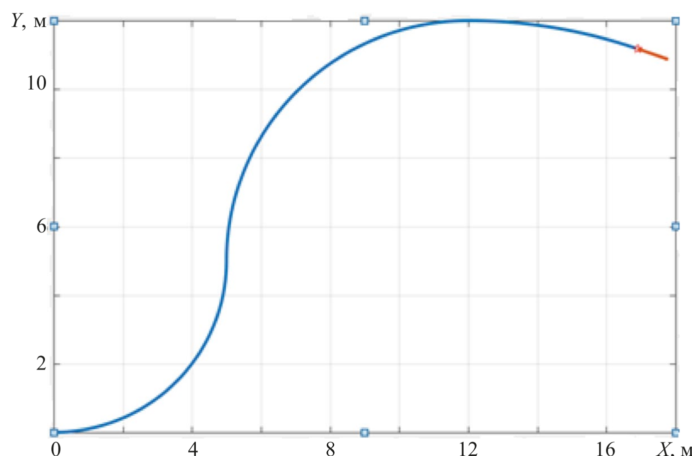


Рис. 1. Траектория движения сосредоточенной силы

При расчетах принимались следующие значения используемых параметров: толщина ледяного покрова h = 0,25 м, модуль Юнга E = 500 000 000 Н/м², коэффициент Пуассона льда μ = 1/3, плотность льда ρ = 900 кг/м³, плотность воды ρ = 1 000 кг/м³, ε = 5. Ниже представлены результаты проведенных расчетов.

На рис. 2 приведено изменение прогиба ледяного покрова при скорости движения силы v = 2,5 м/с, касательном ускорении w_t = 1 м/с², глубине водоема H = 25 м и времени релаксации τ_o = 1 с.

Закон движения силы по траектории принимался в виде:

$$s = a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t.$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 подбирались таким образом, чтобы сила, находясь в одной и той же точке траектории, имела необходимые скорость и касательное ускорение.

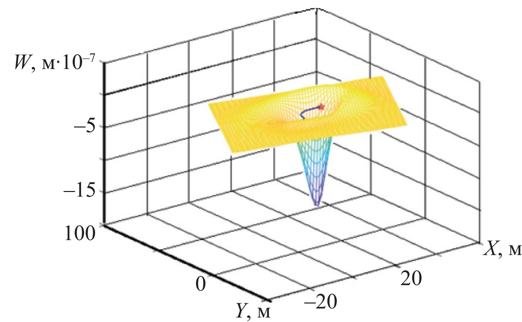


Рис. 2. Изменение прогиба ледяного покрова

При других значениях указанных параметров качественный характер распределения прогиба ледяного покрова оставался практически неизменным.

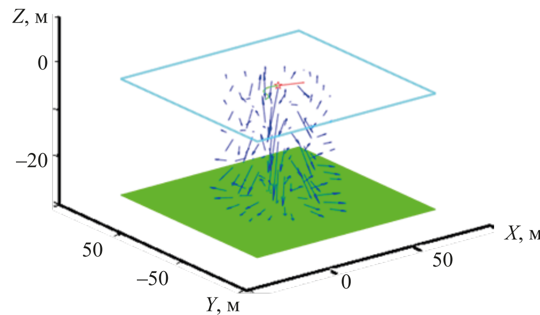


Рис. 3. Движение жидкости, обусловленное действием подвижной нагрузки на ледяной покров

Движение жидкости, обусловленное действием подвижной нагрузки при тех же значениях скорости, касательного ускорения движения нагрузки, времени релаксации и глубины водоема, представлено на рис. 3 (изображено распределение вектора скоростей частиц жидкости).

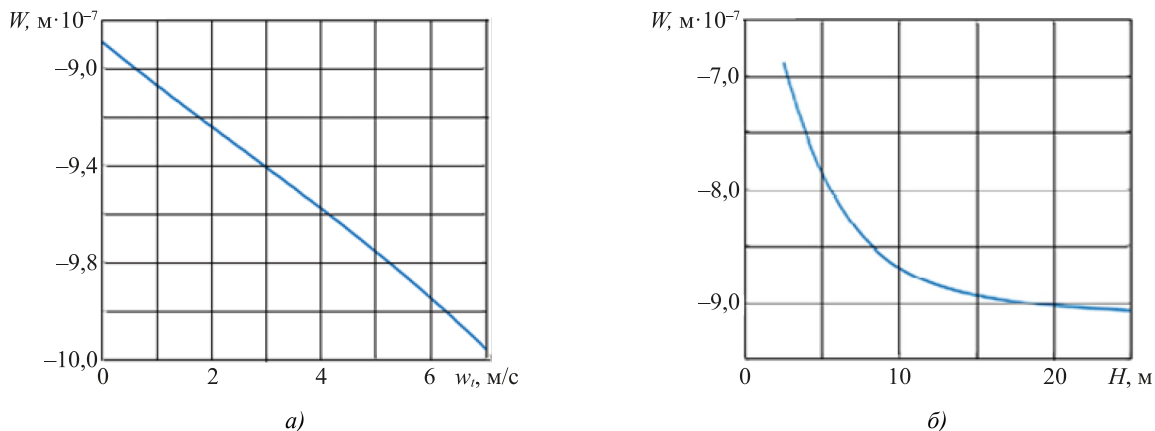


Рис. 4. Изменение величины максимального прогиба ледяного покрова в зависимости:
а — от величины касательного ускорения; *б* — от глубины водоема

Влияние на максимальный прогиб ледяного покрова касательного ускорения движения силы представлено на рис. 4 *а*. В этом случае скорость движения силы была равной $v = 17{,}5$ м/с, а время релаксации $\tau_o = 1$ с.

На рис. 4 *б* изображен график зависимости величины максимального прогиба ледяного покрова W от глубины водоема H. Скорость движения нагрузки при этом равнялась $v = 17{,}5$ м/с, касательное ускорение $w_t = 1$ м/с^2 и время релаксации $\tau_o = 1$ с.

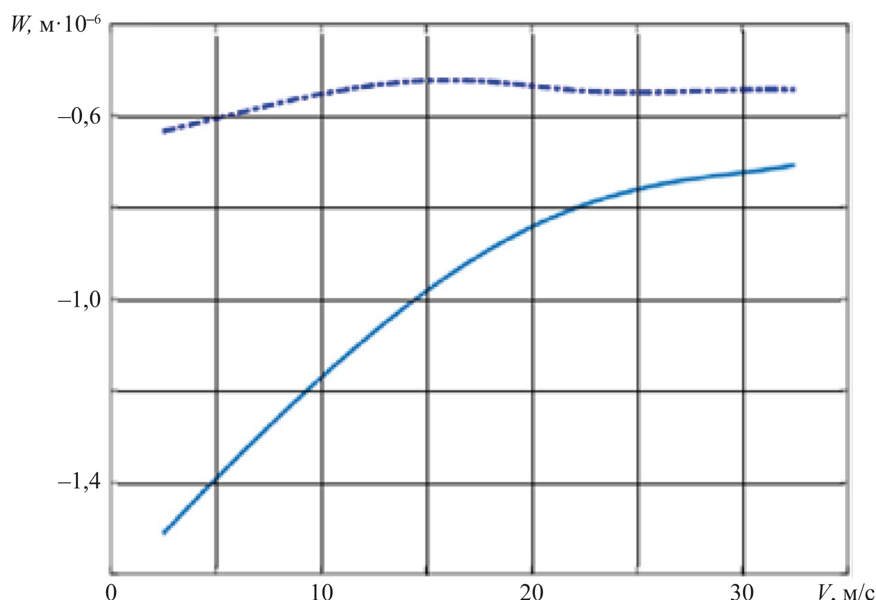


Рис. 5. Изменение максимального прогиба ледяного покрова в зависимости от скорости движения силы

Зависимость максимального прогиба ледяного покрова от скорости движения силы представлена графически на рис. 5. Глубина водоема при этом принималась равной 25 м, а величина касательного ускорения — $w_t = 1$ м/с^2. Сплошной линией изображена зависимость, соответствующая времени релаксации $\tau_o = 1$ с, пунктирная линия соответствует времени релаксации $\tau_o = 10$ с.

Обсуждение и заключение. Исследовано влияние глубины водоема на максимальный прогиб льда. Получена картина прогиба ледового покрова, обусловленная действием сосредоточенной силы, движущейся по сложной траектории с переменной скоростью. Расчеты показали, что с увеличением глубины водоема максимальный прогиб ледяного покрова уменьшается (рис. 2). При этом заметная зависимость прогиба ледяного покрова от глубины водоема H имеет место лишь для $H \leq 25$ м. При больших глубинах величина максимальных прогибов стабилизируется около некоторого постоянного значения и практически не изменяется. Таким образом, если $H > 25$ м, то при расчетах глубину водоемов можно считать бесконечной.

Увеличение касательного ускорения приводит к увеличению прогиба ледяного покрова. Причем зависимость прогиба от касательного ускорения очень близка к линейной зависимости (рис. 4).

При малых временах релаксации τ_o скорость движения нагрузки заметно влияет на величину прогиба льда. При больших временах влияние скорости движения нагрузки на прогиб ледяного покрова заметно уменьшается (рис. 5).

Для изучения состояния жидкости водоема определено распределение вектора скорости движения частиц жидкости, обусловленное действием подвижной силы по льду (рис. 3).

Разработанный метод решения задач и результаты, полученные с его помощью, могут быть использованы при строительстве ледовых дорог, проектировании и строительстве взлетно-посадочных полос на льду.

Список литературы / References

1. Ningbo Zhang, Xing Zheng, Qingwei Ma, Zhenhong Hu. A Numerical Study on Ice Failure Process and Ice-Ship Interactions by Smoothed Particle Hydrodynamics. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2019;11(2):796–808. https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2019.02.008

2. Wenxiao Pan, Tartakovsky AM, Monaghan JJ. A Smoothed-Particle Hydrodynamics Model for Ice-Sheet and Ice-Shelf Dynamics. *Journal of Glaciology*. 2012;58(208):216–222. https://doi.org/10.3189/2012JoG11J084

3. Shunying Ji. Discrete Element Modeling of Ice Loads on Ship and Offshore Structures. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Discrete Element Methods.* Singapore: Springer; 2017. P. 45–54. http://doi.org/10.1007/978-981-10-1926-5_6

4. Hisette Q, Alekseev A, Seidel J. Discrete Element Simulation of Ship Breaking Through Ice Ridges. In: *Proceedings of the 27th International Ocean and Polar Engineering Conference. International Society of Offshore and Polar Engineers*. Cupertino, CA: ISOPE; 2017. P. 1–15.

5. Цветков Д.О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* 2018;28(3):328–347. https://doi.org/10.20537/vm180305

Tsvetkov DO. Small Motions of an Ideal Stratified Fluid Partially Covered with Elastic Ice. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2018;28(3):328–347. https://doi.org/10.20537/vm180305

6. Wenjun Lu, Raed Lubbad, Sveinung Løset. Out-of-Plane Failure of an Ice Floe: Radial-Crack-Initiation-Controlled Fracture. *Cold Regions Science and Technology*. 2015;119:183−203. https://doi.org/10.1016%2Fj.coldregions.2015.08.009

7. Renshaw CE, Schulson EM, Sigward SJG. Experimental Observation of the Onset of Fracture Percolation in Columnar Ice. *Geophysical Research Letters.* 2017;44(4):1795−1802. https://doi.org/10.1002/2016GL071919

8. Якименко О.В., Сиротюк В.В. Армирование ледовых переправ. *Криосфера Земли.* 2014;18(1):88−91.

Yakimenko OV, Sirotyuk VV. Reinforcement of Ice Crossings. *Earth's Cryosphere.* 2014;18(1):88−91.

9. Козин В.М., Васильев А.С., Земляк В.Л., Ипатов К.И. Исследование предельного состояния ледяного покрова в условиях чистого изгиба при усилении армирующими элементами. *Вестник Томского государственного университета.* 2019;(61):61–69. https://doi.org/10.17223/19988621/61/6

Kozin VM, Vasilyev AS, Zemlyak VL, Ipatov KI. Research of the Limiting State of Ice Cover under Conditions of Pure Bending with Reinforcement by Reinforcing Elements. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2019;(61):61–69. https://doi.org/10.17223/19988621/61/6

10. Букатов А.Е., Букатов А.А., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. *Распространение поверхностных волн в ледовых условиях*. Монография. Севастополь: Морской гидрофизический институт РАН; 2019. 204 с.

Bukatov AE, Bukatov AA, Zharkov VV, Zav'yalov DD. *Propagation of Surface Waves in Ice Conditions*. Monograph. Sevastopol: Marine Hydrophysical Institute; 2019. 204 p. (In Russ.)

11. Ткачева Л.А. Поведение полубесконечного ледяного покрова при периодическом динамическом воздействии. *Прикладная механика и техническая физика.* 2017;58(4):82–94.

Tkacheva LA. Behavior of Semi-Infinite Ice Cover under Periodic Dynamic Impact. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2017;58(4):82-94.

12. Tabata T. Studies on Visco-Elastic Properties of Sea Ice. In: *Arctic Sea Ice: Proceedings of the Conference.* Washington, DC: US National Academy of Sciences; 1958. P. 139–147.

13. Земляк В.Л., Васильев А.С., Жуков Д.С. Определения напряжённо-деформированного состояния ледяного покрова при поверхностном армировании под воздействием статических и динамических нагрузок. *Вестник евразийской науки.* 2022;14(2):51–60.

Zemlyak VI, Vasilyev AS, Zhukov DS. Determination of the Stress-Strain State of the Ice Cover with Surface Reinforcement under the Influence of Static and Dynamic Loads. *The Eurasian Scientific Journal.* 2022;14(2):51–60.

14. Guyenne P, Părău EI. Computations of Fully Nonlinear Hydroelastic Solitary Waves on Deep Water. *Journal of Fluid Mechanics.* 2012;713:307–329. https://doi.org/10.1017/jfm.2012.458

15. Шишмарев К.А., Хабахпашева Т.И. Нестационарные колебания ледового покрова в замороженном канале под действием движущегося внешнего давления. *Вычислительные технологии.* 2019;24(2);111–128. https://doi.org/10.25743/ICT.2019.24.2.010

Shishmarev KA, Khabakhpasheva TI. Unsteady Deflection of Ice Cover in a Frozen Channel under a Moving Load. *Computational Technologies.* 2019;24(2);111–128. https://doi.org/10.25743/ICT.2019.24.2.010

16. Wang K, Hosking RJ, Milinazzo F. Time-Dependent Response of a Floating Viscoelastic Plate to an Impulsively Started Moving Load. *Journal of Fluid Mechanics.*2004;521:295–317. https://doi.org/10.1017/S002211200400179X

17. Shishmarev K, Khabakhpasheva T, Korobkin A. The Response of Ice Cover to a Load Moving along a Frozen Channel. *Applied Ocean Research.* 2016;59:313–326. http://doi.org/10.1016/j.apor.2016.06.008

18. Стурова И.В. Движение внешней нагрузки по полубесконечному ледяному покрову в докритическом режиме. *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2018;53(1):51–60. https://doi.org/10.7868/S056852811801005X

Sturova IV. Motion of an External Load over a Semi-Infinite Ice Sheet in the Subcritical Regime. *Fluid Dynamics*. 2018;53(1):51–60. https://doi.org/10.7868/S056852811801005X

19. Галабурдин А.В. Бесконечная пластина, нагруженная нормальной силой, движущейся по сложной траектории. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2020;20(4):370–381. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-370-381

Galaburdin AV. Infinite Plate Loaded with Normal Force Moving along a Complex Path. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2020;20(4):370–381. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2020-20-4-370-381

20. Галабурдин А.В. Метод решения задачи о движении нагрузки по ледяному покрову водоема по сложной траектории. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(1):34–40. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-34-40

Galaburdin AV. Method for Solving the Problem of Load Movement over the Ice Cover of a Reservoir along a Complex Trajectory. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2023;23(1):34–40. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-1-34-40

Об авторе:

Александр Васильевич Галабурдин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ORCID, Galaburdin@mail.ru

About the Author:

Alexander V. Galaburdin, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Mathematics and Informatics Department, Don State Technical University (1, Gagarin Sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), ORCID, Galaburdin@mail.ru

Конфликт интересов: **автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

Conflict of Interest Statement: **the author declares no conflict of interest.**

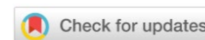
Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The author has read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 11.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 03.04.2024
Принята к публикации / Accepted 12.04.2024

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE





УДК [004.032.26:004.94:621.91](083.13)
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-178-189

Оригинальное теоретическое исследование

Реализация цифровой модели тепловых характеристик на основе температурного поля



EDN: EYQXQZ

В.В. Позевалкин ✉, **А.Н. Поляков**
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург, Российская Федерация
✉ pozevalkinvv@mail.ru

Аннотация

Введение. Компьютерное моделирование позволяет инженерам принимать обоснованные проектные решения за счет точной оценки тепловых характеристик объектов проектирования. Актуальным направлением научных исследований и разработок является реализация технологии цифровых двойников в процессе проектирования технических объектов. Для этого необходимо разрабатывать компьютерные модели, точность которых соответствует требованиям, предъявляемым к цифровым двойникам. Однако в научной литературе недостаточно широко представлены результаты исследований, направленных на реализацию технологии цифровых двойников в процессе проектирования. В основном рассматриваются общие вопросы, связанные с применением цифровых двойников в различных отраслях промышленности. Поэтому целью данного исследования явилась разработка цифровой модели и сравнительный анализ точности расчетов тепловых характеристик объекта проектирования.

Материалы и методы. В качестве основного инструмента для проведения исследования выступает предложенная авторами методика разработки компьютерной модели тепловых характеристик для реализации технологии цифровых двойников. Численное решение реализовано путем построения тепловой модели для расчета температурного поля на основе метода конечных элементов в системе инженерного анализа «Ansys» от компании «Ansys Inc» (США). Для аналитического решения применяется разработанная на основе метода пространства состояний компьютерная модель тепловых характеристик, реализованная в модуле «Ansys Twin Builder». Модель пространства состояний приводится в соответствие с поведением исходной тепловой модели путем приближения передаточной функции к пошаговому отклику тепловой нагрузки с применением метода векторной аппроксимации во временной области. Верификация построенной аналитической модели выполнялась в системе инженерных расчетов «MATLAB» от компании «The MathWorks» (США). Исследования проводились для станка модели 400V производства предприятия ООО «НПО «Станкостроение» г. Стерлитамак (Россия).

Результаты исследования. Разработана цифровая модель, позволяющая с высокой точностью выполнить расчет тепловых характеристик объекта проектирования. Результаты сравнительного анализа показывают высокую степень соответствия значений тепловых характеристик, полученных с помощью предложенной цифровой модели, результатам численного моделирования. Максимальная погрешность расчета тепловых характеристик не превышает 0,1 °C.

Обсуждение и заключение. Компьютерное моделирование, сочетающее численные методы расчета и научный подход, основанный на технологии цифровых двойников, позволяют получить результат максимально приближенный к результатам экспериментов. Предложенная в исследовании цифровая модель является эффективным решением, поскольку позволяет выполнить расчеты для оценки тепловых характеристик в режиме реального времени, что является одним из важнейших требований при реализации технологии цифровых двойников.

Ключевые слова: цифровой двойник, сложный технический объект, компьютерное моделирование, автоматизированное проектирование, температурное поле, тепловые характеристики

Благодарности. Авторы выражают благодарность редакции и рецензентам за внимательное отношение к статье и указанные замечания, которые позволили повысить ее качество.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (соглашение № 075–15–2023–151).

Для цитирования. Позевалкин В.В., Поляков А.Н. Реализация цифровой модели тепловых характеристик на основе температурного поля. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):178–189. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-178-189

Original Theoretical Research

Implementation of a Digital Model of Thermal Characteristics Based on the Temperature Field

Vladimir V. Pozevalkin ✉, **Alexander N. Polyakov**
Orenburg State University, Orenburg, Russian Federation
✉ pozevalkinvv@mail.ru

Abstract

Introduction. Computer modeling allows engineers to make valid design decisions by accurately assessing the thermal characteristics of design objects. The implementation of digital twin technology in the process of designing technical facilities is the current direction of scientific research and development. To do this, it is necessary to develop computer models whose accuracy meets the requirements for digital twins. However, the scientific literature does not widely present the results of research aimed at implementing digital twin technology in the design process. The general issues related to the use of digital twins in various industries are mainly considered. Therefore, the objective of this study was the development of a digital model and a comparative analysis of the accuracy of calculations of thermal characteristics of the design object.

Materials and Methods. The main tool for conducting the research was the methodology proposed by the authors for developing a computer model of thermal characteristics for the implementation of digital twin technology. The numerical solution was implemented through constructing a thermal model for calculating the temperature field based on the finite element method in the ANSYS engineering analysis system from ANSYS, Inc. (USA). For the analytical solution, a computer model of thermal characteristics developed on the basis of the state-space method, implemented in the ANSYS Twin Builder module, was used. The state-space model was matched to the behavior of the original thermal model through approximating the transfer function to the stepwise response of the thermal load using the time domain vector approximation method. Verification of the constructed analytical model was carried out in the engineering calculation system MATLAB from the MathWorks company (USA). The research was carried out for a 400V machine model manufactured by NPO “Stankostroenie” LLC, Sterlitamak (Russia).

Results. The developed digital model makes it possible to calculate the thermal characteristics of the design object with high accuracy. The results of the comparative analysis showed a high degree of correspondence between the values of thermal characteristics obtained using the proposed digital model and the results of numerical simulation. The maximum error in calculating thermal characteristics did not exceed 0.1ºC.

Discussion and Conclusion. Computer modeling that combines numerical calculation methods and a scientific approach based on digital twin technology, provides obtaining the result as close as possible to the results of experiments. The digital model proposed in the study is an effective solution, since it provides performing calculations to evaluate thermal characteristics in real time, which is one of the most important requirements for the implementation of digital twin technology.

Keywords: digital twin, complex technical object, computer modeling, computer-aided design, temperature field, thermal characteristics

Acknowledgements. The authors would like to thank the Editorial board and the reviewers for their attentive attitude to the article and for the specified comments that improved the quality of the article.

Funding Information. The research was carried out with the financial support from the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation within the framework of the strategic academic leadership program “Priority-2030” (Agreement No. 075–15–2023–151).

For citation. Pozevalkin VV, Polyakov AN. Implementation of a Digital Model of Thermal Characteristics Based on the Temperature Field. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):178–189. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-178-189

Введение. Компьютерное моделирование традиционно является эффективным инструментом для решения тепловых проблем на ранней стадии проектирования сложных технических объектов. Однако решение проблемы требует точной оценки тепловых характеристик объекта проектирования для снижения негативных эффектов, вызванных повышением температуры [1]. При этом одним из эффективных инструментов для предварительной оценки тепловых характеристик является имитационное моделирование в системе инженерного анализа на основе передовых цифровых решений и разработок. Например, в работе [2] авторов Jianying Xiao и Kaiguo Fan представлен разработанный цифровой двойник для определения тепловых характеристик. Принцип работы двойника заключается в моделировании теплового поведения объекта путем отображения и коррекции тепловых граничных условий. Результаты эксперимента показали высокую точность модели (более 95 %), что существенно для повышения точности моделирования тепловых характеристик и тепловой оптимизации. Поэтому актуальным направлением научных исследований и разработок в области моделирования является применение систем искусственного интеллекта [3] и цифровых двойников [4]. Например, в работе [3] авторов Haoran Yi и др. для повышения точности анализа тепловых характеристик предложена интерактивная модель коррекции тепловых граничных условий на основе нейронной сети. Результаты экспериментов показывают, что точность расчета температурного поля превышает 98 %, а точность прогнозирования тепловой деформации — 96 %, что эффективно повышает точность моделирования. Кроме того, в работе [5] авторов Курганова Н.В. и др. отмечено, что цифровые двойники часто применяются с целью совершенствования физических прототипов сложных технических объектов, поскольку позволяют не только обеспечить информационное сопровождение процесса проектирования, но и принимать эффективные проектные решения на основе наработок в области искусственного интеллекта.

Одной из характерных особенностей технологии цифровых двойников является то, что для имитационного моделирования часто применяются компьютерные модели пониженного порядка [6]. Поэтому разработка компьютерных моделей является одним из базовых условий в реализации технологии цифровых двойников [7]. Понижение порядка моделей — эффективный и понятный с математической точки зрения подход для преодоления ограничений времени выполнения многомерных имитационных моделей. Например, в работе [8] авторов Мирзаев Д.А. и др. предложена простая аналитическая модель тепловых полей для разработки цифровых двойников процесса промышленной дуговой сварки. Авторы Бордачев Е.В. и Лапшин В.П. в своей работе [9] представили результаты математического моделирования температуры в зоне контакта инструмента и изделия при токарной обработке металлов. Такой подход позволяет получить точную оценку тепловых характеристик, соответствующую результатами численных экспериментов в режиме реального времени. В работе [10] авторы Schröder C. и Matthias V. представили модель пониженного порядка и предложили новую процедуру балансировки модели, основанную на преобразовании сдвига состояния. В заключении представили результаты сравнительного анализа с результатами из источников литературы, полученных с помощью серии численных экспериментов.

Применение линейной и инвариантной по времени компьютерной модели пониженного порядка позволяет обеспечить быстрое моделирование при сохранении высокой точности расчетов [11]. При разработке компьютерной модели выполняется аппроксимация [12] передаточной функции для приближения модели пространства состояний к пошаговому отклику исходной тепловой модели [13]. Поскольку пошаговый отклик тепловой нагрузки получен из исходной тепловой модели, то цифровая модель должна предоставить те же значения тепловых характеристик.

Однако несмотря на то, что в последнее время наблюдается рост интереса к цифровому двойнику, в научной литературе недостаточно широко представлены результаты исследований, связанных с реализацией цифровых решений в процессе проектирования технических объектов. На основе систематического обзора литературы и тематического анализа публикаций по цифровым двойникам выявлен один из ключевых пробелов в знаниях, связанный с разработкой математического, программного и методического обеспечения высокоточных компьютерных моделей в рамках реализации технологии цифровых двойников.

В этой связи целью исследования являлась разработка компьютерной модели пониженного порядка и анализ эффективности её применения в составе цифровой модели для точного расчета тепловых характеристик сложных технических объектов проектирования.

Для достижения поставленной цели требовалось построить тепловую модель и выполнить расчет температурного поля объекта проектирования, сгенерировать независимые пошаговые отклики тепловой нагрузки с помощью разработанного программного сценария [14], реализовать цифровую модель для расчета тепловых характеристик, определить погрешность расчетов, полученных с помощью численного и аналитического решений и провести сравнительный анализ полученных результатов моделирования.

Материалы и методы. Построение температурного поля объекта моделирования выполнялось для однородного изотропного тела на основе уравнения нестационарной теплопроводности:

$$\partial T/\partial t = a^2 \Delta T + q_v/c, \tag{1}$$

где T — температура (°C); t — время (с); $a = \sqrt{\lambda/(\rho \cdot c)}$ — коэффициент температуропроводности (м²/с); λ — коэффициент теплопроводности (Вт/м·°C); c — удельная теплоемкость (Дж/кг·°C); ρ — плотность материала (кг/м³); Δ — оператор Лапласа; q_v — объемная мощность тепловыделения (Вт/м³).

Тепловой поток в процессе теплопередачи принимался равным количеству теплоты, переносимой через произвольную поверхность площадью S в единицу времени t, что выражается следующим уравнением:

$$Q = -\int_t \int_S q_n dS dt, \tag{2}$$

где Q — тепловой поток (Вт); q_n — плотность теплового потока (Вт/м²); S — площадь поверхности (м²).

Плотность теплового потока при теплоотдаче определялась по формуле:

$$q_c = \alpha \cdot S \cdot (T_S - T_\infty), \tag{3}$$

где α — коэффициент теплоотдачи (Вт/(м²·°C)); T_S — температура поверхности (°C); T_∞ — температура окружающей среды (°C).

В этой связи, для расчета температурного поля объекта моделирования по формуле (1), задавались тепловые потоки (2) и (3), которые определяли количество теплоты, проходящее через поверхность в единицу времени.

В качестве объекта моделирования был выбран компонент (рис. 1) металлорежущего станка модели «400V» производства предприятия ООО «НПО «Станкостроение» (Россия, г. Стерлитамак) в виде сверлильной головки.

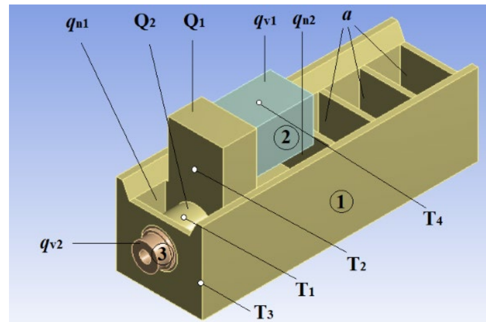


Рис. 1. Геометрическая модель объекта в «Ansys Design Modeler»:
1 — корпус; 2 — электродвигатель; 3 — шпиндельный узел; Q — тепловые потоки;
q_v — объемная мощность тепловыделений; q_n — плотности тепловых потоков;
a — коэффициент теплоотдачи; T_1–T_4 — температурные датчики

Поскольку для расчета температурного поля учитывалось количество теплоты, выделяемое в основном электродвигателем (электромагнитные потери) и шпиндельным узлом (механические потери на трение), то в качестве внутренних источников тепла принимались электродвигатель q_{v1} и шпиндельный узел q_{v2}, вблизи которых задавались соответствующие тепловые потоки Q_1 и Q_2. Плотности тепловых потоков q_{n1}, q_{n2} назначались для поверхностей, расположенных вблизи электродвигателя и шпиндельного узла соответственно.

Конвекция задавалась коэффициентом теплоотдачи α с учетом условий теплообмена (свободная конвекция в воздухе). Поскольку станок контактирует с газообразной средой (воздух), то количество теплоты, отданное нагретой поверхностью окружающей среде в единицу времени t, прямо пропорционально разности температуры поверхности T_S и среды T_∞ в зависимости от S площади теплоотдающей поверхности (3).

При построении тепловой модели объекта (твердого тела), состоящего из однородного материала (конструкционная сталь) с постоянными теплофизическими свойствами и наличием внутренних источников тепла, назначались следующие начальные и граничные условия:

– начальные условия учитывали фиксацию постоянной температуры по всей поверхности объекта моделирования ($t = 0$: $T = T_0 = const$);

– граничные условия второго рода задавались тепловыми потоками электродвигателя (Q_1), шпиндельного узла (Q_2), плотностью теплового потока (q_{n1}) от электродвигателя к передней стенке корпуса и (q_{n2}) к внутренним поверхностям;

– граничные условия третьего рода задавались коэффициентом теплоотдачи (α) для поверхностей, расположенных внутри корпуса сверлильной головки;

– граничные условия четвертого рода для контактных соединений поверхностей учитывали идеальный тепловой контакт и отсутствие термического сопротивления:

$$T\big|_{-0} = T\big|_{+0}; \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{-0} = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{+0} + q_v. \tag{4}$$

Тепловые потоки (Q_1, Q_2), плотности тепловых потоков (q_{n1}, q_{n2}), как и объемная мощность тепловыделения (q_{v1}, q_{v2}), назначались в соответствии с известными рекомендациями по металлорежущим станкам [1]. Граничные условия, как и тепловые потоки, задавались для наружных поверхностей. Поэтому учитывалось, что взаимосвязи тепловых полей присутствовали только между внешними поверхностями.

Дифференциальное уравнение (1), совместно с начальными и граничными условиями второго (2), третьего (3) и четвертого (4) рода, представляет собой математическую формулировку поставленной задачи. Поставленная задача решалась с помощью методов численного и аналитического моделирования.

Численное решение выполнялось на основе метода конечных элементов в системе инженерного анализа «Ansys», которая разрабатывается американской компанией «Ansys Inc» (США) и поставляется фирмой «МЦД», авторизованным дистрибьютором «Ansys» в России. Геометрическая модель (рис. 1) объекта импортировалась в проект «Ansys Workbench» с добавлением блока анализа переходного температурного поля «Transient Thermal». При численном решении выполнялась калибровка параметров моделирования и граничных условий тепловой модели (таблица 1) для приближения модельных значений температуры к экспериментальным данным.

Таблица 1

Граничные условия (параметры) тепловой модели

Параметр	Мощность тепловыделений		Тепловые потоки		Плотности тепловых потоков		Коэффициент теплоотдачи
	q_{v1}, Вт/м^3	q_{v2}, Вт/м^3	Q_1, Вт	Q_2, Вт	q_{n1}, Вт/м^2	q_{n2}, Вт/м^2	a, Вт/(м^2·°С)
Значение	6 500	1 000	28	15	32	18	15

В модуле «Ansys Mechanical» назначались начальные (начальная температура T_0=24 °С) и граничные (таблица 1) условия для построенной сеточной модели, выполнялось построение температурного поля (рис. 2). При этом коэффициент теплопроводности принимался равным λ=60,5 Вт/(м °С) и назначался таковым для конструкционной стали.

Тепловая модель объекта включала два контактных соединения для электродвигателя и гильзы шпинделя с корпусом сверлильной головки и содержала 7 тепловых граничных условий. Построенная сеточная модель состояла из 16 309 элементов и 58 527 узлов.

Общее время моделирования 21 600 секунд (6 часов) разбивалось на интервалы (1 час) и шаги Δt = 360 секунд (6 минут), всего N = 60 шагов, в пределах которых параметры тепловой модели (граничные условия) принимались как постоянные и независящие от времени.

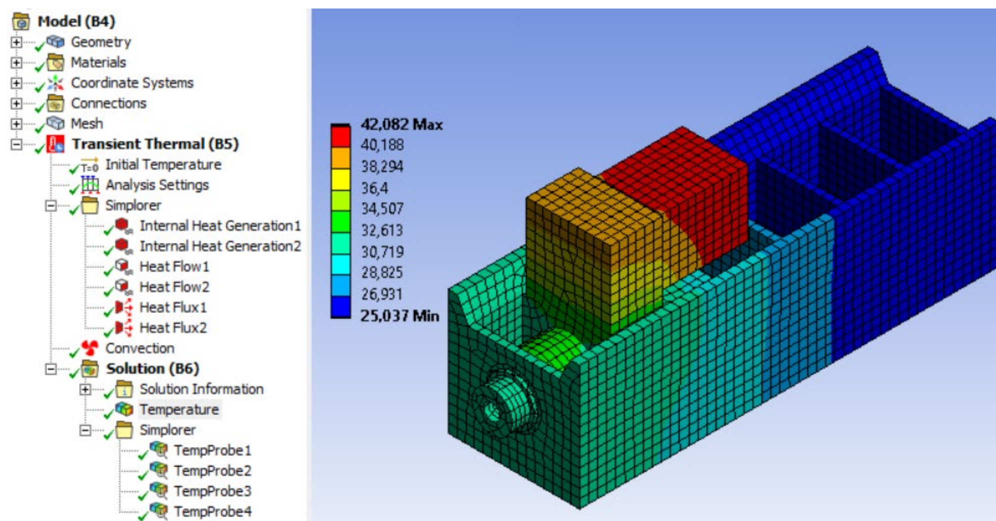


Рис. 2. Температурное поле объекта в «Ansys Mechanical»

Расчет температурного поля требовался для генерации независимого пошагового отклика тепловой нагрузки, содержащего информацию об изменении температуры по времени (тепловые характеристики) для каждого параметра (таблица 1) тепловой модели в отдельности:

$$\tilde{y}_i(t) = T_{i,j}(t), i = \overline{1, k},\ j = \overline{1, m}, \qquad (5)$$

где k — количество температурных датчиков; m — количество параметров тепловой модели.

Генерация пошагового отклика выполнялась в модуле «Ansys Mechanical» с применением расширения «Application Customization Toolkit (ACT)», которое поддерживает внедрение пользовательских сценариев. Это позволило разработать программный сценарий на языке программирования «Python» с целью автоматической генерации специального набора файлов, содержащих независимые пошаговые отклики [14].

Аналитическое решение выполнялось на основе метода пространства состояний путем построения модели тепловых характеристик по формуле:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \tag{6}$$

где $\dot{x} = \partial x / \partial t$ — производная вектора x состояний по времени t; y и u — векторы выходных и входных данных соответственно; A, B, C, D — матрицы постоянных коэффициентов.

В уравнении (6), вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$ содержит переменные состояния, вектор входа $u = (q_{v1}, q_{v2}, Q_1, Q_2, q_{n1}, q_{n2}, T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0k})^T$ значения параметров тепловой модели (граничные и начальные условия), вектор выхода $y = (T_1, T_2, \ldots, T_k)^T$ значения тепловых характеристик.

Модель передаточной функции выражается следующим уравнением:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} H_{i,j}(t) u_j,\ i = \overline{1,k}, \tag{7}$$

где H — матричная комплексная передаточная функция.

Матричная передаточная функция H получена путем применения к формуле (6) преобразования Лапласа, что выражается следующим уравнением:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D, \tag{8}$$

где s — комплексная переменная Лапласа; I — единичная диагональная матрица.

Передаточная функция (8) отражает зависимость преобразования Лапласа выходной переменной $Y(s) = H(s)U(s)$ от преобразования Лапласа входной переменной $U(s)$ модели (6) при нулевых начальных условиях $x(0) = x_0 = 0$. При этом размерность матрицы передаточной функции H зависит от величины выхода $k = 4$ и размерности входной величины $m = 10$, что соответствует размерности исходного пошагового отклика (5). Поэтому модель (6) приводилась в соответствие с поведением исходной тепловой модели путем приближения ее передаточной функции (7) к пошаговому отклику (5) с применением метода векторной аппроксимации [15].

Для построения матриц коэффициентов модели (6) выполнялся обратный переход от передаточной функции (8) к модели в пространстве состояний. В этом случае, передаточная функция (8) принимает вид уравнения, в знаменателе которого содержится характеристический полином степени $l = 4$ (порядок системы), а в числителе полином степени $z = l - 1$:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},\ P(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{z} b_i s^i,\ Q(s) = a_0 + \sum_{i+1}^{l} a_i s^i. \tag{9}$$

где a и b коэффициенты полиномов $Q(s)$ и $P(s)$ соответственно.

Корни полиномов $Q(s)$ и $P(s)$ представляют собой полюса и нули передаточной функции (8) соответственно. Метод неопределённых множителей применялся к уравнению (9) для разложения каждого элемента матрицы H на элементарные дроби. Обозначив полюса характеристического полинома через p_i, получаем уравнение следующего вида:

$$G(s) = D + \sum_{i=1}^{q} \frac{R_i}{s - p_i}, \tag{10}$$

где $R_i = \lim\limits_{p \to p_i} (s - p_i) \dfrac{P(s)}{Q(s)}$ — матрица размерностью $(k \times m)$; q — количество полюсов.

Ранг матрицы R_i обозначался через r_i и выполнялось ее разложение на произведение двух матриц с полным рангом столбца и строки соответственно:

$$R_i = C_i^{k \times r_i} B_i^{r_i \times m},\ rank(R_i) = r_i. \tag{11}$$

Матрицы модели (6) являются диагональными, размерностью $A^{n \times n}$, $B^{n \times m}$, $C^{k \times n}$, $D^{k \times m}$ ($n = 56$) и содержат элементы, которые получены непосредственно из коэффициентов передаточной функции (10).

Матрицы A системы и B управления содержат следующие коэффициенты:

$$A=\begin{bmatrix} p_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_{i3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{qn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & b_{i2} & \dots & 0 \\ b_{q1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_{q2} & \dots & b_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{qm} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Матрицы C выхода и D прямой связи содержат следующие коэффициенты:

$$C=\begin{bmatrix} c_{i1} & \dots & c_{1q} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{(k-1)i} & \dots & c_{(k-1)q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{k,i} & \dots & c_{k,q} \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Такой подход позволил выполнить переход от модели в форме передаточной функции (8) к модели в пространстве состояний (6). Алгоритмы перехода также реализованы в системе инженерных расчетов «MATLAB», коммерческой компании «The MathWorks» (США), в виде специальных функции «ss2tf()» и «tf2ss()».

Для получения значений тепловых характеристик решалась задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, поскольку в формуле (6) переменная $\dot{x}$ является производной от вектора состояний температурного поля по времени t. Решение системы уравнений (6) было получено с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка.

Верификация построенной аналитической модели выполнялась путем проведения серии вычислительных экспериментов с применением, разработанной в системе «MATLAB» прикладной программы, которая включала реализацию метода Рунге-Кутты четвертого порядка (рис. 3). Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере (процессор AMD Ryzen 5 5600U with Radeon Graphics 2.30 GHz, оперативная память 16,0 ГБ, тип системы 64-разрядная операционная система Windows 10 Pro версия 21H2), характеристики которого являются базовыми для современной вычислительной техники.

Построенная аналитическая модель и применение метода Рунге-Кутты четвертого порядка для решения системы дифференциальных уравнений позволило с высокой точностью вычислить значения тепловых характеристик (рис. 3). Поскольку максимальные значения погрешности, то есть разность между модельными значениями тепловых характеристик, полученных с помощью численного (FE-Model) и аналитического (LTI-Model) решений, не превысили 0,72 °C на всем интервале моделирования.

Линейная и инвариантная по времени (Linear and Time-Invariant, LTI) компьютерная модель пониженного порядка (Reduced Order Model, ROM) разрабатывалась в модуле «Ansys Twin Builder» системы инженерного анализа «Ansys» на основе температурного поля объекта и сгенерированного в модуле «Ansys Mechanical» пошагового отклика. ccc

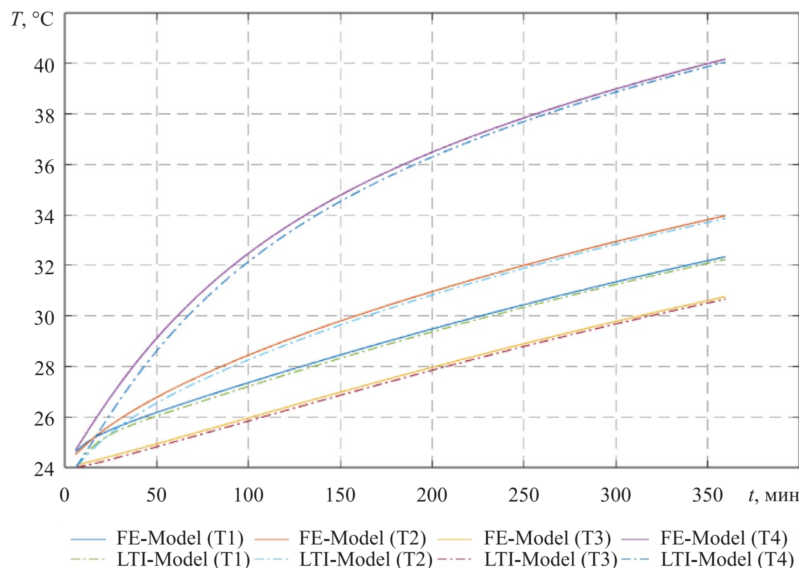


Рис. 3. Графики тепловых характеристик в системе «MATLAB»

Реализация цифровой модели тепловых характеристик на основе температурного поля с применением векторной аппроксимации заключается в последовательном выполнении семи основных этапов:

Этап 1. Импорт геометрической модели объекта и построение тепловой модели в системе инженерного анализа;

Этап 2. Расчет температурного поля объекта на основе построенной тепловой модели;

Этап 3. Генерация независимого пошагового отклика по результатам численного моделирования тепловых характеристик объекта;

Этап 4. Применение алгоритма векторной аппроксимации для получения полюсов и нулей передаточной функции модели пространства состояний;

Этап 5. Построение модели пространства состояний по известной передаточной функции;

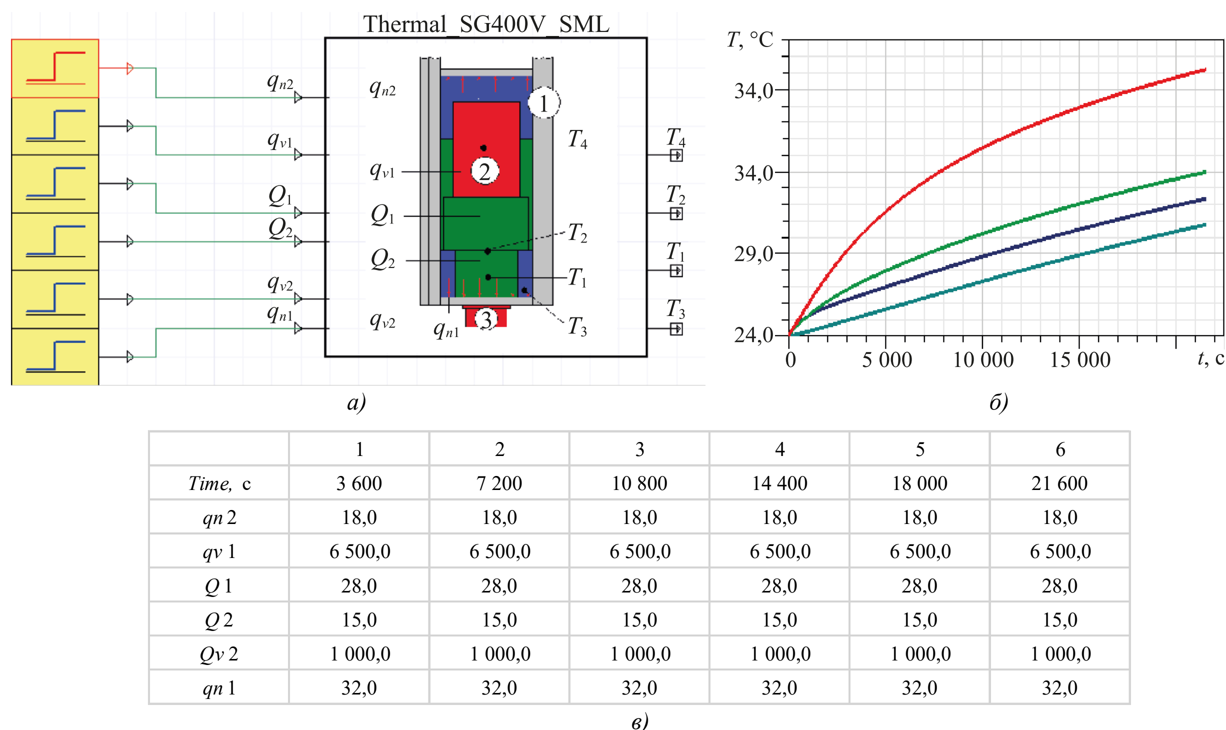
Этап 6. Разработка компьютерной модели тепловых характеристик;

Этап 7. Реализация цифровой модели объекта.

Таким образом предложенная цифровая модель, содержащая компьютерную модель для точной оценки тепловых характеристик сложных технических объектов проектирования, была получена путем последовательного выполнения всех представленных выше этапов.

Результаты исследования. Разработанная компьютерная модель (Thermal_SG400V_SML1) содержит 6 входов и 4 выхода (рис. 4), что позволяет выявить взаимосвязь между параметрами тепловой модели и значениями тепловых характеристик. В качестве входных данных компьютерной модели приняты объемная мощность тепловыделений (q_{v1}, q_{v2}), тепловые потоки (Q_1, Q_2) и плотности тепловых потоков (q_{n1}, q_{n2}). В качестве выходных данных выступают тепловые характеристики (T_1–T_4). Компьютерная модель входит в состав цифровой модели (рис. 4 *а*) тепловых характеристик, реализованной в модуле «Ansys Twin Builder».

Значения параметров цифровой модели, представленные в табличном виде (рис. 4 *в*), подаются на вход компьютерной модели (рис. 4 *а*) с помощью компонентов «STEP». Графический модуль демонстрирует значения тепловых характеристик (рис. 4 *б*), полученных на выходе компьютерной модели.



	1	2	3	4	5	6
Time, с	3 600	7 200	10 800	14 400	18 000	21 600
qn 2	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0	18,0
qv 1	6 500,0	6 500,0	6 500,0	6 500,0	6 500,0	6 500,0
Q 1	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0	28,0
Q 2	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0	15,0
Qv 2	1 000,0	1 000,0	1 000,0	1 000,0	1 000,0	1 000,0
qn 1	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0	32,0

в)

Рис. 4. Реализация цифровой модели в системе «Ansys Twin Builder»:
а — компьютерная модель тепловых характеристик; *б* — модуль графического представления результатов;
в — модуль контроля входных данных компьютерной модели

При разработке компьютерной модели задавались пределы размерности от 2 до 4 порядка, значения целевой ошибки $\varepsilon = 5\times10^{-3}$ и допуск для нулевого порядка $\varepsilon_0 = 2\times10^{-3}$. Остальные параметры устанавливались автоматически, поскольку метод векторной аппроксимации максимально автоматизирован в сравнении с остальными методами, которые поддерживаются в модуле «Ansys Twin Builder».

В процессе разработки компьютерной модели модуль «Ansys Twin Builder» автоматически генерирует специальную матрицу ошибок аппроксимации $M_{ij} = || y_i(t) - \tilde{y}_i(t) ||_j$ во временной области, каждый элемент которой

отражает разность между значениями тепловых характеристик пошагового отклика (5) и передаточной функции (7) модели в пространстве состояний, что выражается следующим уравнением:

$$M = \begin{bmatrix} 0,43 & 4,04 & 1,53 & 4,97 & 2,22 & 1,82 \\ 0,21 & 2,22 & 2,54 & 1,07 & 1,16 & 1,95 \\ 2,66 & 1,63 & 0,39 & 0,26 & 3,43 & 1,82 \\ 1,46 & 3,21 & 0,06 & 0,84 & 2,95 & 3,50 \end{bmatrix} \times 10^{-3}. \quad (14)$$

В данном случае максимальная относительная ошибка не превышает значение $\varepsilon = 4{,}97 \times 10^{-3}$. При этом все остальные значения ошибок оказались меньше указанного $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ предела. Нулевое значение ошибки в матрице (14) означает, что вход был проигнорирован в связи с очень малым вкладом.

Оценка точности расчета тепловых характеристик с применением предложенной цифровой модели выполнялась путем сравнительного анализа результатов, полученных с помощью численного и аналитического решений. Сравнительный анализ проводился по критерию максимальной погрешности. Максимальная погрешность ΔT_{max}, то есть разность между значениями тепловых характеристик, полученных с помощью численного и аналитического решений для всех температурных датчиков, в каждый момент времени рассчитывается по формуле:

$$\Delta T_{max} = \max_{j=1,n} \Delta T_j, \quad (15)$$

где $\Delta T_j = |T_{j,f} - T_{j,d}|$ — погрешность; $T_{j,f}$ и $T_{j,d}$ — значения температуры конечно-элементной и цифровой моделей соответственно $(j = \overline{1, m})$; m — количество температурных датчиков.

Для оценки точности цифровой модели выполнялся расчет погрешностей, результаты которого представлены в виде поверхности (рис. 5 *а*) и линейного графика (рис. 5 *б*) максимальной погрешности по времени. Поверхность (рис. 5 *а*) представляет собой расчетные значения погрешности ΔT_j для каждого температурного датчика ($dT1$, $dT2$, $dT3$, $dT4$) в отдельности и в каждый момент времени на всем интервале моделирования.

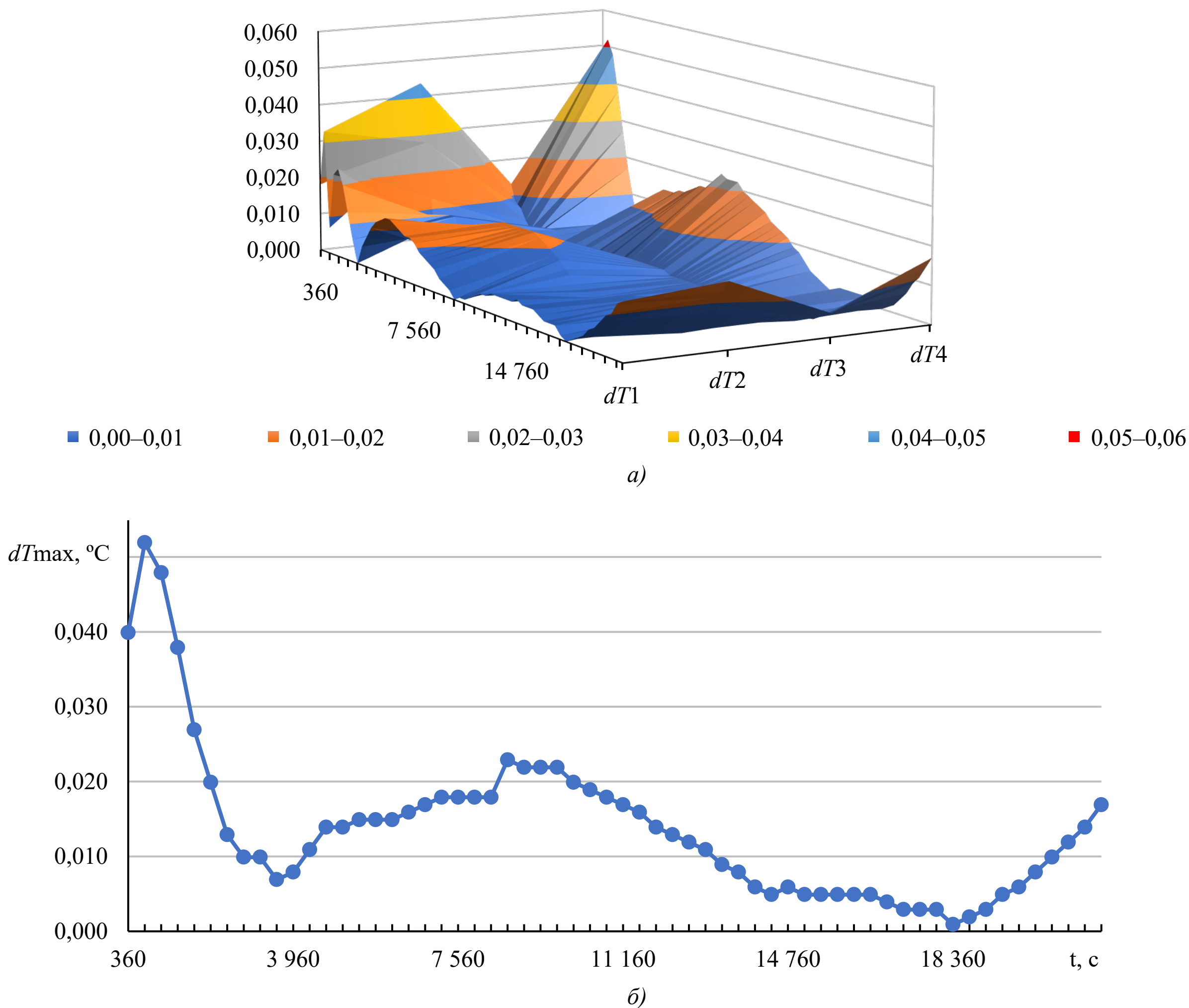


Рис. 5. Погрешности расчета тепловых характеристик: *а* — погрешность для каждого температурного датчика; *б* — максимальная погрешность для всех температурных датчиков

График (рис. 5 *б*) показывает, что для выбранного интервала времени максимальная погрешность ΔT_{max} не превышает 0,1 °C. Погрешность расчета тепловых характеристик для каждого температурного датчика в отдельности (рис. 5 *а*) также не превышает заданных пределов.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты вычислительных экспериментов и проведенный сравнительный анализ подтверждают эффективность применения предложенной цифровой модели, которая позволяет с высокой точностью ΔT_{max} = 0,052 °C выполнить расчет тепловых характеристик, для дальнейшего проведения процедур анализа и идентификации тепловой модели.

На температурное поле объекта проектирования влияет множество факторов, что осложняет определение номинальных значений тепловых граничных условий. Для решения данной проблемы в исследовании сначала анализируются ключевые технологии, задействованные в реализации цифрового двойника сложного технического объекта, затем строятся тепловая модель и компьютерная модель пониженного порядка LTI ROM переходного температурного поля. Разработанная компьютерная модель применяется в составе цифровой модели, которая позволяет получить точную оценку тепловых характеристик объекта проектирования и тем самым повысить эффективность выполнения проектных процедур в процессе автоматизированного проектирования сложных технических объектов.

Точность и эффективность вычислений компьютерной модели пониженного порядка и исходной тепловой модели полного порядка оценивается путем сравнительного анализа результатов моделирования. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что с точки зрения точности расчетов компьютерные модели пониженного порядка и конечно-элементные модели полного порядка в основном сопоставимы по точности, а максимальная погрешность расчетов находится в пределах допустимого диапазона и не превышает 0,1 °C.

Полученные в ходе вычислительных экспериментов результаты не противоречат результатам, представленным в источниках научной литературы по схожей тематике и позволяют сделать вывод о том, что применение предложенной цифровой модели эффективно для оценки тепловых характеристик сложных технических объектов в режиме реального времени, что является одним из важнейших условий для реализации технологии цифровых двойников.

Однако изменение температурного поля сложного технического объекта по-прежнему зависит от многих факторов. Поэтому в дальнейших исследованиях необходимо разработать компьютерные модели тепловых деформаций и ввести эффективные алгоритмы оптимизации на основе искусственного интеллекта, чтобы обеспечить надежность результатов моделирования, полученных с помощью цифровых двойников.

Список литературы / References

1. Бушуев В.В., Кузнецов А.П., Сабиров Ф.С., Хомяков В.С., Молодцов В.В. Проблемы точности и эффективности современных металлорежущих станков. *СТИН*. 2016;(2):6–16. https://doi.org/10.3103/S1068798X16090070

Bushuev VV, Kuznetsov AP, Sabirov FS, Khomyakov VS, Molodtsov VV. Precision and Efficiency of Metal-Cutting Machines. *Russian Engineering Research*. 2016;36:762–773. https://doi.org/10.3103/S1068798X16090070

2. Jianying Xiao, Kaiguo Fan. Research on the Digital Twin for Thermal Characteristics of Motorized Spindle. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2022;119:5107–5118. https://doi.org/10.1007/s00170-021-08508-y

3. Haoran Yi, Kaiguo Fan. Co-Simulation-Based Digital Twin for Thermal Characteristics of Motorized Spindle. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2023;125(9–10):4725–4737. https://doi.org/10.1007/s00170-023-11060-6

4. Kuo Liu, Lei Song, Wei Han, Yiming Cui, Yongqing Wang. Time-Varying Error Prediction and Compensation for Movement Axis of CNC Machine Tool Based on Digital Twin. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*. 2022;18(1):109–118. https://doi.org/10.1109/TII.2021.3073649

5. Курганова Н.В., Филин М.А., Черняев Д.С., Шаклеин А.Г., Намиот Д.Е. Внедрение цифровых двойников как одно из ключевых направлений цифровизации производства. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019;7(5):105–115. http://injoit.org/index.php/j1/article/view/748

Kurganova N, Filin M, Cherniaev D, Shaklein A, Namiot D. Digital Twins' Introduction as One of the Major Directions of Industrial Digitalization. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019;7(5):105–115. http://injoit.org/index.php/j1/article/view/748

6. Jones D, Snider C, Nassehi A, Yon J, Hicks B. Characterising the Digital Twin: A Systematic Literature Review. *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*. 2020;29A:36–52. https://doi.org/10.1016/j.cirpj.2020.02.002

7. Aumann Q, Benner P, Saak J, Vettermann J. Model Order Reduction Strategies for the Computation of Compact Machine Tool Models. In: *Proc. 3rd International Conference on Thermal Issues in Machine Tools.* Cham: Springer; 2023. P. 132–145. https://doi.org/10.1007/978-3-031-34486-2_10

8. Мирзаев Д.А., Окишев К.Ю., Мирзоев А.А. Простая аналитическая модель тепловых полей для разработки цифровых двойников процесса промышленной дуговой сварки. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2023;15(1):76–86. https://doi.org/10.14529/mmph230109

Mirzaev DA, Okishev KYu, Mirzoev AA. A Simple Analytical Model of Thermal Fields to Develop Digital Twins in Industrial Arc Welding. *Vestnik of South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics.* 2023;15(1):76–86. https://doi.org/10.14529/mmph230109

9. Бордачев Е.В., Лапшин В.П. Математическое моделирование температуры в зоне контакта инструмента и изделия при токарной обработке металлов. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2019;19(2):130–137. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-2-130-137

Bordatchev EV, Lapshin VP. Mathematical Temperature Simulation in Tool-to-Work Contact Zone during Metal Turning. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2019;19(2):130–137. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-2-130-137

10. Schröder C, Matthias V. Balanced Truncation Model Reduction with a Priori Error Bounds for LTI Systems with Nonzero Initial Value. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2023;420:114708. https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114708

11. Xaver Thiem, Kauschinger B, Ihlenfeldt S. Online Correction of Thermal Errors Based on a Structure Model. *International Journal of Mechatronics and Manufacturing Systems*. 2019;12(1):49–62. https://doi.org/10.1504/IJMMS.2019.097852

12. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С. Векторная аппроксимация в МКЭ для оболочки вращения при учете сдвиговых деформаций. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2020;(4):35–43. https://doi.org/10.31857/S0235711920040070

Klochkov YuV, Nikolaev AP, Ishchanov TR, Andreev AS. FEM Vector Approximation for a Shell of Revolution with Account for Shear Deformations. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020;49:301–307. https://doi.org/10.3103/S105261882004007X

13. Xiao Hu, Scott Stanton, Long Cai, Ralph E White. A Linear Time-Invariant Model for Solid-Phase Diffusion in Physics-Based Lithium Ion Cell Models. *Journal of Power Sources*. 2012;214:40–50. https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2012.04.040

14. Поляков А.Н., Позевалкин В.В. *Программный модуль генерации входных данных для построения цифровых моделей*. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ 2023660032. 2023. 1 с.

Polyakov AN, Pozevalkin VV. *Software Module for Generating Input Data for Building Digital Models*. RF Certificate of State Registration of a Computer Program, no. 2023660032. 2023. 1 p. (In Russ.).

15. Гурарий М.М., Жаров М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л., Ходош Л.С. Эффективный алгоритм реализации метода векторной аппроксимации в задачах идентификации передаточных функций динамических систем. *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2015;16(9):579–584. https://doi.org/10.17587/mau.16.579-584

Gourary MM, Zharov MM, Rusakov SG, Ulyanov SL, Khodosh LS. An Effective Algorithm for Realization of the Vector Fitting Method for the Identification Tasks of the Dynamical Systems. *Mechatronics, Automation, Control*. 2015;16(9):579–584. https://doi.org/10.17587/mau.16.579-584

Об авторах:

Владимир Владимирович Позевалкин, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики в экономике и управлении Оренбургского государственного университета (460018, Российская Федерация, г. Оренбург, пр. Победы, 13), SPIN-код: 4360-0892, ORCID, ScopusID, ResearcherID, pozevalkinvv@mail.ru

Александр Николаевич Поляков, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии машиностроения, металлообрабатывающих станков и комплексов Оренбургского государственного университета (460018, Российская Федерация, г. Оренбург, пр. Победы, 13), SPIN-код: 3242-5123, ORCID, ScopusID, anp_temos@mail.ru

About the Authors:

Vladimir V. Pozevalkin, Cand.Sci. (Eng.), Senior Lecturer of the Applied Computer Science in Economics and Management Department, Orenburg State University (13, Pobedy Ave., Orenburg, 460018, Russian Federation), SPIN-code: 4360-0892, ORCID, ScopusID, ResearcherID, pozevalkinvv@mail.ru

Alexander N. Polyakov, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Technology of Mechanical Engineering, Metalworking Machines and Complexes, Orenburg State University (13, Pobedy Ave., Orenburg, 460018, Russian Federation), SPIN-code: 3242-5123, ORCID, ScopusID, anp_temos@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

В.В. Позевалкин: разработка программного обеспечения, проведение расчетов, описание теоретической части исследования, оформление научной статьи.

А.Н. Поляков: научное руководство, формирование цели и задач исследования, анализ результатов исследований, корректировка выводов.

Claimed Contributorship:

VV Pozevalkin: software development, calculation analysis, description of the theoretical part of the study, design of the research article.

AN Polyakov: academic advising, formulation of research objectives and tasks, analysis of the research results, correction of the conclusions.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

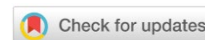
Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 04.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 28.03.2024
Принята к публикации / Accepted 10.04.2024

МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE





УДК 531.3
Original Theoretical Research
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197

Modeling the Dynamic Loads Affecting a Bridge Crane during Start-Up



EDN: FFNHOM

Imad Rezakalla Antypas
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ Imad.antypas@mail.ru

Abstract

Introduction. The dynamic loads during the start-up of a bridge crane can cause excessive stress in the structure and components, leading to potential safety hazards and increased wear and tear. To reduce the influence of the dynamic loads, various strategies can be implemented including optimization of the acceleration and deceleration profiles, using the soft start controls, implementing the vibration damping systems. It is vital to ensure that the proper crane maintenance and inspection protocols are in place. By reducing the impact of dynamic loads during the start-up, the overall performance and longevity of a bridge crane can be improved, ultimately enhancing safety and efficiency of the industrial operations. The present research offers a new approach to improving the efficiency and safety of industrial operations by providing a more precise account of the dynamic loads during the start-up of a bridge crane. The objective of this study is to develop a mathematical model for investigating the mechanical properties of the bridge cranes by analyzing the dynamic loads that occur during lifting operations.

Materials and Methods. The development of the mathematical model was based on the kinetic model of the system, which included three connecting blocks and two flexible connections for a more accurate description of the bridge crane structure. Lagrange's equations incorporating the information about the geometry and structure of a bridge crane were used. They made it possible to describe the motion of a system with the multiple elements and degrees of freedom. Processing and analysis of the results of the mathematical model were carried out in the MATLAB program using the Runge-Kutta method.

Results**.** As a result of the research, a mathematical model was developed to study the dynamic loads affecting a bridge crane during lifting operations. Graphs describing the dependences of speed, acceleration, load, and rope angle over time, and their influence on the crane beam were plotted. The changes in these parameters over time, including their maximum values, were analyzed. The reasons for load changes and factors influencing the extension of lifting machines' service life as well as reducing metal consumption during production thereof were identified.

Discussion and Conclusion. The developed mathematical model and its numerical solution using the specialized software (MATLAB) allow for conducting the dynamic analysis of the bridge crane structures and determining the optimal design solutions. The analysis of the factors influencing the load changes leads to the conclusion that the use of this model can significantly reduce the load magnitudes and metal consumption, as well as increase the service life of lifting machines. The results obtained with the developed mathematical model and its numerical solution are useful for optimizing the crane structures, providing compliance with the operational requirements, and extending the service life of lifting machines.

Keywords: bridge crane, dynamic load, kinetic model, load lifting, dynamic analysis

For Citation. Antypas IR. Modeling the Dynamic Loads Affecting a Bridge Crane during Start-Up. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):190–197. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197

Оригинальное теоретическое исследование

Моделирование динамических нагрузок, воздействующих на мостовой кран в момент пуска

И.Р. Антибас
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ Imad.antypas@mail.ru

Аннотация
Введение. Динамические нагрузки во время запуска мостового крана могут вызывать избыточные напряжения в конструкции, приводя к потенциальным рискам и увеличению износа. Для снижения влияния динамических нагрузок можно применять различные стратегии, включая оптимизацию профилей ускорения и замедления, использование плавного пуска, внедрение систем амортизации. Важно обеспечивать исполнение правильных протоколов обслуживания и инспекции кранов. Путем снижения воздействия динамических нагрузок во время запуска можно улучшить общую производительность и долговечность мостового крана, повысив в конечном итоге безопасность и эффективность промышленных операций. Данное исследование предлагает новый подход к повышению эффективности и безопасности промышленных операций за счет более точного учета динамических нагрузок мостового крана при пуске. Цель работы — разработка математической модели для изучения механических свойств мостовых кранов путем анализа динамических нагрузок, возникающих во время подъемных операций.

Материалы и методы. Разработка математической модели была выполнена на основе кинетической модели системы, включающей три соединительных блока и два гибких соединения для более точного описания конструкции мостового крана. Использованы уравнения Лагранжа, включающие информацию о геометрии и структуре мостового крана. Они позволили описать движение системы с несколькими элементами и несколькими степенями свободы. Обработка и анализ результатов математической модели были произведены в программе MATLAB с применением метода Рунге-Кутты.

Результаты исследования. В результате исследования была разработана математическая модель для изучения динамических нагрузок на мостовой кран во время подъемных операций. Построены графики, описывающие зависимости скорости, ускорения, нагрузки и угла каната относительно времени и их влияние на балку крана. Проанализировано изменение этих параметров во времени, включая их максимальные значения. Определены причины изменений нагрузки и факторы, влияющие на увеличение срока службы и снижение металлоемкости при производстве подъемных машин.

Обсуждение и заключение. Разработанная математическая модель и ее численное решение с использованием специализированного программного обеспечения (программа MATLAB) позволяют проводить динамический анализ конструкций мостового крана и определять оптимальные конструктивные решения. Анализ факторов, влияющих на изменение нагрузки, позволяет сделать вывод, что при использовании данной модели можно значительно снизить величину нагрузок и металлоемкость, а также увеличить срок службы подъемных машин. Результаты, полученные при помощи разработанной математической модели, и ее численное решение полезны при оптимизации конструкции кранов, обеспечении соответствия операционных требований и продлении срока службы подъемных машин.

Ключевые слова: мостовой кран, динамическая нагрузка, кинетическая модель, подъем грузов, динамический анализ

Для цитирования. Антибас И.Р. Моделирование динамических нагрузок, воздействующих на мостовой кран в момент пуска. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2024;24(2):190–197. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197

Introduction. The analysis of dynamic processes in the mechanical part plays an important role in the development of new overhead cranes and modernization of existing ones in order to reduce loads on control devices and extend their service life [1].

The bridge crane is subjected to dynamic loads during non-static operations, such as acceleration and braking. Analysis of these processes allows identifying hidden impacts on the dynamic behavior of the bridge crane. Therefore, it is paramount for the researcher to make an optimal design choice to reduce these loads, ensuring that the crane can meet the required operating conditions [2].

In [3], a dynamic model of a crane lifting system was developed, using which an accurate direct numerical integration method was proposed for calculating the dynamic loads of the system.

Papers [4, 5] studied dynamic loads in a metal structure, taking into account fatigue of the metal material. However, the researcher neglected the impact of forces from the drive of the lifting mechanism operating with artificial parameters.

In [6], dynamic loads in a bridge crane were determined during the operation of a lifting mechanism when hoisting a load suspended on a rope. The most important case studied was the effect of dynamic loads on the crane when removing a load from a solid foundation, at the moment of lifting-off.

Steel structures of bridge cranes experience non-stationary loads with different stress amplitudes and asymmetry of the working cycle [7]. To study the real load of bridge cranes under typical operating conditions, constant recording of their stress state is required, which is labor-intensive [8]. Therefore, statistical processing of the obtained results is used to assess the loading elements of metal structures of bridge cranes [9]. This involves changing individual components of the total load of metal elements, such as the gravity of the load being lifted, the angle of rotation of the load, and weather loads, and then summing them according to the laws of probability theory [9,10]. This approach is less labor-intensive than a comprehensive study of loading under typical operating conditions. However, determining the probabilistic characteristics of individual random loads also takes time, so the method for calculating load combinations is widely used in crane construction [11].

In [12], it was found that during the stage of selecting the rope slack, the value of the stator current of the electric motor of the lifting mechanism did not depend on the mass of the suspended load. However, as the load increased, the time of its rise also increased, and at the stage of separating the load from the surface, the amplitude values of the current increased. Furthermore, a noticeable difference appeared after five periods of mains voltage from the beginning of the stage. However, the researcher neglected the significant influence of forces arising from the drive of the lifting mechanism working with artificial elements.

By using the developed mathematical model, the research aims at optimizing the design of bridge cranes through studying the dynamic loads that occur during lifting operations, ensuring that the crane has the ability to meet the required operating conditions.

Materials and Methods

Kinetic Model of the System under Study. When developing a kinetic model of the system under study, it can be represented that the construction of a bridge crane for a given motion form consists of three connecting blocks and two flexible joints, and has the form shown in Figure 1:

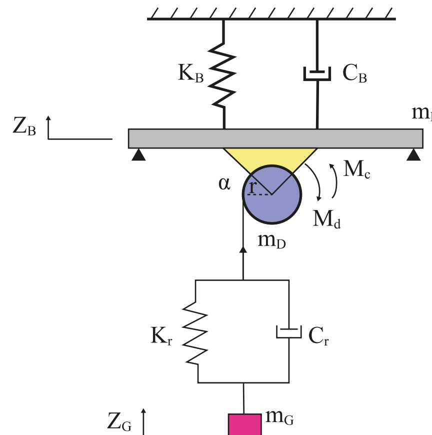


Fig. 1. Bridge crane kinetic model

m_B — mass of the main bridge, moving along the *X*-axis; m_D — mass of the lifting mechanism, moving along the *Y*-axis; m_G — payload; K_B and C_B — elasticity modulus and damping coefficient of the main bridge; K_R and C_R — elasticity modulus and damping coefficient of the ropes; α — swing angle of lifting mechanism winding.

Derivation of Kinetic Equations Reflecting the Motion of the Dynamic Model

Mathematical equations representing the motion of the dynamic model are derived from the partial differential Lagrange equation, which is considered to be one of the best methods used specifically in cases where the system consists of more than one element and when it has several degrees of freedom.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial q_i}=Qi, \tag{1}$$

$$L=T-U, \tag{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial U}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=Q_i, \tag{3}$$

where T — kinetic energy; U — potential energy; D — damping energy; Q — external forces affecting the whole system; q_i — common system of coordinates; i — degrees of freedom of the model under study.

Kinetic energy equation:

$$T = 0.5m_B\dot{z}_B^2 + 0.5m_D\dot{z}_B^2 + 0.5m_G\dot{z}_G^2 + 0.5J\cdot\dot{\alpha}^2. \tag{4}$$

Potential energy equation:

$$U = 0.5K_B z_B^2 + 0.5K_r\left(z_G - r\alpha + z_B\right)^2. \tag{5}$$

Damping equation:

$$D = 0.5C_B\dot{z}_B^2 + 0.5C_r\left(\dot{z}_G^2 - r\dot{\alpha} + \dot{z}_B\right)^2. \tag{6}$$

System equations:

$$\left(m_B + m_D\right)\ddot{z}_B + K_B z_B + K_r\left(z_B - r\alpha + z_G\right) + C_B\dot{z}_B + Cr\left(\dot{z}_B - r\dot{\alpha} + \dot{z}_G\right) = 0, \tag{7}$$

$$^{*}m_G\ddot{z}_G + K_r\left(z_G - r\alpha + z_B\right) + C_r\left(\dot{z}_G - r\dot{\alpha} + \dot{z}_B\right) = 0, \tag{8}$$

$$^{*}J\cdot\ddot{\alpha} + K_r r\left(\alpha - z_G - z_B\right) + C_r\cdot r\left(\dot{\alpha} - \dot{z}_G - \dot{z}_B\right) = M_d - M_c, \tag{9}$$

where M_d, M_c — resistance momentum and lifting mechanism momentum; J — inertia of rotating mass of the lifting mechanism.

Numerical Solution of a Mathematical Model Using the Fourth-Degree Equation of Runge-Kutta

The numerical solution of equations (7–9) was obtained using the Runge-Kutta method in the MATLAB program. The dynamic equations were derived within the program, incorporating the input data and a set of commands to process these equations. The resulting graphs illustrate the interconnections between the various blocks and components of the crane structure under consideration.

The Conditioning of the Input Values Required to Solve the Model

The study was conducted on an ACE type bridge crane consisting of three parts (Fig. 2):

– lifting trolley;

– main bridge, which supports the lifting mechanism;

– end trucks, which support the main bridge.



Fig. 2. Main parts of a bridge crane ACE

To align the operation of the bridge crane with a standard set of coordinate axes, the following assumption was made:

– the lifting trolley functions as a unit responsible for raising a load along the *Z*-axis and allows for horizontal motion along the Y-axis relative to the main bridge, which is the axis along which the crane moves.

A study was conducted on a prototype bridge crane with a lifting capacity of 10 tons and a width of 21.5 meters. The following characteristics were considered:

– payload: m_G = 10,000 kg;

– mass of the two main bridges: m_B = 8,100 kg;

– mass of the lifting mechanism with the trolley: m_D = 700 kg.

When determining the input values, all the laws of designing the structures of lifting devices were followed, and the connections of all components were taken into account. The main factors considered were:

– power of the drive of the lifting mechanism along the *Z*-axis;

– stiffness coefficient of the steel structure (K_B);

– stiffness coefficient of the rope (K_r);

– damping coefficient of the metal frame (C_B);

– damping coefficient of the ropes (C_r).

Table 1

Shows the elements of the design structure of the bridge crane that was studied.

Element name	Value	Unit of measurement	Notation
Load	10	Ton	m_G
Crane mass	8,100	Kg	m_B
Trolley mass	700	Kg	m_D
Crane length	21.5	m	L
Height of lift	5	m	H
Beam device degree	2	–	A
Gear box ratio	4.5	–	i_m
Coil radius	0.25	m	R
Rope diameter	16.5	mm	d_k
Engine power	30	kW	N_n
Speed of the engine rotor core	905	r.p.m	n_n
Rope stiffness coefficient	11 169.8	N/mm	K_B
Rope damping coefficient	23 934.4	N/mm	K_r
Rope damping coefficient	83.37	N.sec/m	C_r
Metal frame damping coefficient	30.29	N.sec/m	C_B

Research Results

Study of the Model Operation Using a Computer

Structural Behavior of a Metal Bridge Crane under Momenta Loads

The structural behavior of a metal bridge crane during the process of lifting a load is depicted by three curves (Fig. 3).

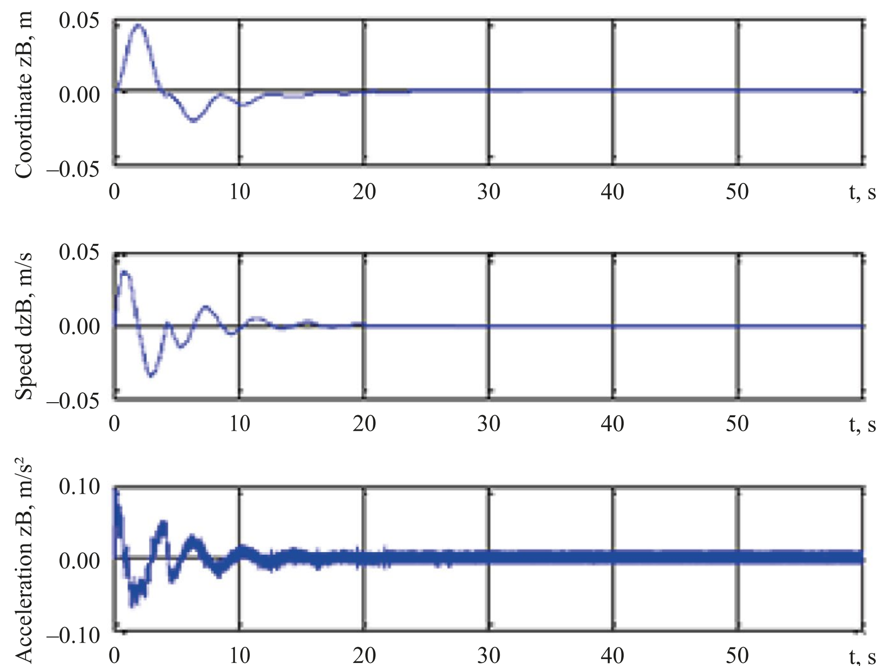


Fig. 3. Coordinates of vertical motion, speed and acceleration of the COG of the bridge cranes versus time curves

In Figure 3, the first curve shows the coordinates of the bridge crane along the ordinate axis as a function of time. During lifting, some vibration of the crane's metal structure is observed for 5–10 seconds, which then stabilizes and does not affect its rigidity.

The second curve in this figure depicts the change in the speed of the center of gravity of the bridge crane over time. During lifting the load, the speed initially increases and then gradually decreases until stabilization. This indicates that the center of gravity of the bridge crane assumes a stable position within the specified time period, during which the vibration stabilizes.

The third curve reflects the change in the center of gravity of the bridge crane over time. It is noteworthy that the acceleration value at the moment of lifting the load is 0.07 m/s², with the dynamic load reaching its maximum.°

Load Curves

Figure 4 shows three curves that reflect motion of the load during the crane operation at the time of lifting.

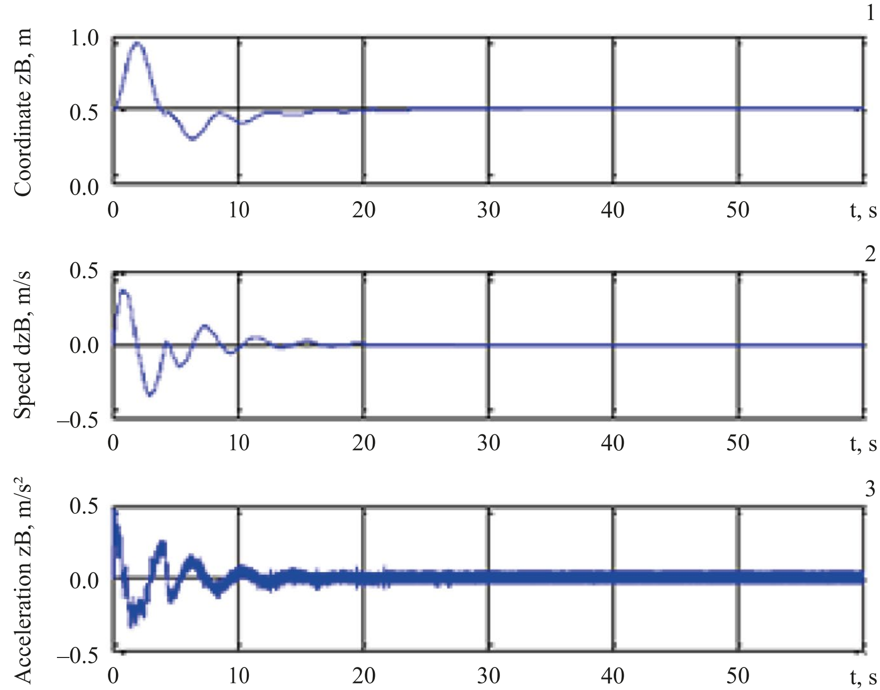


Fig. 4. Coordinates of the speed and acceleration of the load lifting versus time curves

In Figure 4, the first curve reflects the change in the position of the center of gravity of the load over time during its lifting to a certain height, calculated by the program, by rotating the drum by 180 degrees and then stopping. The height of the load suspension indicated on the graph is 0.78 m.

The second curve on this graph shows the change in the lifting speed of the load over time. When the drum rotates, the lifting speed of the load initially increases, then gradually decreases until it stabilizes.

The third curve represents the change in the acceleration of the load lifting over time. At the moment of lifting the load, the acceleration reaches a maximum value of 0.26 m/s² in 0.8 seconds, and then stabilizes.

From the analysis of these three curves, it can be noticed that the stabilization time of the crane operation is almost constant.

Coil Angle Curve

Figure 5 shows the dependence of the winding rotation on time in degrees.

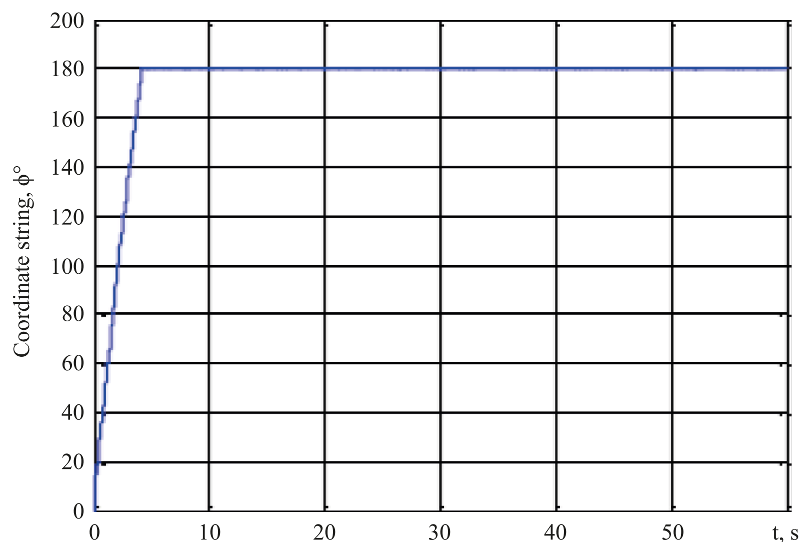


Fig. 5. Coil Angle Curve

Figure 5 shows the change in the angle of rotation of the drum over time. The rotation angle stabilizes when reaching a value of 180 degrees, after which it remains stable, meaning it repeats.

Discussion and Conclusion. Analysis of the above graphs leads to the following conclusions.

The mathematical model and algorithms allow for a detailed study of the motion of a bridge crane at all stages. Adjusting the winch operation and improving the metal structure of the crane have many positive aspects, including reducing dynamic displacements in the metal frame of the crane and transmission elements (such as clutch, gearbox, motor, and pulleys), as well as in the hoisting ropes. This reduction in dynamic loads leads to a decrease in rapid wear of these elements. Additionally, cost savings on maintenance and the development of an optimal metal structure design are achieved, as well as an increase in the crane's service life. This is evident from changes in the center of gravity of the load, speed, and acceleration during its lifting over time. It has been established that the height of the load during lifting, which is directly related to the length of the hoisting ropes, as well as the mass of the lifted load and the design of the main bridge, including its shape and dimensions, significantly influence the dynamic loads experienced by the structure.

The mathematical model offers a new approach to improving the efficiency and safety of industrial operations by providing a more precise understanding and accounting for dynamic loads during the start-up of a bridge crane.

References

1. Fedjaeva GA, Kochevinov DV, Lozbinev VP, Lozbinev FYu. Dynamics Simulation of Bridge Crane Electromechanical System. *Bryansk State University Herald*. 2014;41(1):63–67.

2. Mirsad Čolić, Nedim Pervan, Muamer Delić, Adis J Muminovic, Senad Odzak. Mathematical Modelling of Bridge Crane Dynamics for the Time of Non-Stationary Regimes of Working Hoist Mechanism. *Archive of Mechnical Engineering*. 2022;69(2):189–202. http://doi.org/10.24425/ame.2022.140415

3. Hanjun Pu, Xiaopeng Xie, Guangchi Liang, Xiangyong Yun, Haining Pan. Analysis for Dynamic Characteristics in Load-Lifting System of the Crane. *Procedia Engineering.* 2011;16:586–593. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2011.08.1128

4. Goncharov KA, Denisov IA. Maintenance of Working Capacity of Movement Mechanism of Load Trolley with Linear Traction Electric Drive of Bridge Type Crane. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2017;87(6):062004. https://doi.org/10.1088/1755-1315/87/6/062004

5. Jaafar HI, Mohamed Z, Shamsudin MA, Mohd Subha NA, Liyana Ramli, Abdullahi AM. Model Reference Command Shaping for Vibration Control of Multimode Flexible Systems with Application to a Double-Pendulum Overhead Crane. *Mechanical Systems and Signal Processing.* 2019;115:677–695. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.06.005

6. Dooroo Kim, William Singhose. Reduction of Double Pendulum Bridge Crane Oscillations. In: *Proc. 8th International Conference on Motion and Vibration Control*. Daejeon: Genicom Co., Ltd.; 2006. P. 300–305.

7. Akhtulov AL, Kirasirov OM, Kirasirov MO. Features of Calculation of Steel Structures of Bridge Cranes at Variable Loads. *MATEC Web of Conferences*. 2019;298:00032. https://doi.org/10.1051/matecconf/201929800032

8. Antulov AL. Algorithm of Numerical Calculation of Reactions of Constraints in a Dynamic System of Transport Machine. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;944:012002. https://doi.org/10.1088/1742-6596/944/1/012002

9. Akhtulov AL Kirasirov MO, Kirasirov OM, Mashonsky VA. Building the Automation System for Designing Load-Lifting Cranes of Bridge Type. In: *Proc. XVII International Research and Practice Conference "European Science and Technology".* Munich: Vela Verlag Waldkraiburg; 2017. P. 29–35. URL: https://portal.kuzstu.ru/file/view/68427 (accessed: 08.12.2023).

10. Spitsyna DN, Polikarpov KV. *Dynamics of Cranes with Rigid Load Suspension.* Moscow: Bauman Moscow State Technical University; 2009. P. 160. (In Russ.).

11. Yihai Fang, Yong K Cho, Jingdao Chen. Framework for Real-Time Proactive Safety Assistance for Mobile Crane Lifting Operations. *Automation in Construction*. 2016;72:367–379. https://doi.org/10.1016/j.autcon.2016.08.025

12. Semykina IYu, Kipervasser MV, Gerasimuk AV. Study of Drive Currents for Lifting Bridge cranes of metallurgical enterprises for early diagnosis of load excess weight. *Journal of Mining Institute*. 2021;247:122–131. http://doi.org/10.31897/PMI.2021.1.13

About the Author:

Imad Rizakalla Antipas, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Fundamentals of Machinery Design Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, Russian Federation), SPIN-code: 7371-0223, ORCID, ScopusID, ResearchID, imad.antypas@mail.ru

Об авторе:

Имад Ризакалла Антибас, кандидат технических наук, доцент кафедры основ конструирования машин Донского государственного технического университета (344003, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), SPIN-код: 7371-0223, ORCID, ScopusID, ResearchID, imad.antypas@mail.ru

Conflict of Interest Statement: **the author declares no conflict of interest.**

Конфликт интересов: **автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.**

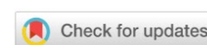
All author has read and approved the final manuscript.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Received / Поступила в редакцию 15.03.2024
Revised / Поступила после рецензирования 10.04.2024
Accepted / Принята к публикации 17.04.2024

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT





УДК 681.884
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-198-206

Оригинальное эмпирическое исследование

Особенности определения пеленга на подводный объект с использованием фазовой информации дифференциального стереодатчика



EDN: FPQRSJ

В.А. Широков, **А.И. Баженова** ✉, **В.Н. Милич**
Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, г. Ижевск, Российская Федерация
✉ aigul_bazh@udman.ru

Аннотация

Введение. Безопасность судоходства и разработок подводных месторождений полезных ископаемых требуют точного обнаружения различных подводных объектов. В литературе рассматриваются вопросы отслеживания их перемещений и траектории движения. Предлагаются методы гидролокации, обеспечивающие высокую точность позиционирования подводных объектов. Отмечена высокая точность пеленга стереодатчиков с ультракороткой базой. Однако такое оборудование чувствительно к частоте дискретизации сигналов, что вызывает «шум дискретизации». В открытом доступе нет публикаций, посвященных решению этой проблемы. Представленное исследование призвано восполнить данный пробел. Цель работы — изучение возможности получения данных, уточняющих информацию о пеленге подводных объектов за счет использования фазовой информации отраженных зондирующих сигналов и дополнительной процедуры передискретизации исходных данных.

Материалы и методы. Местоположение объекта определяли с помощью экспериментального комплекса для исследования гидроакустических датчиков, созданного В.А. Широковым и В.Н. Милич в Удмуртском федеральном исследовательском центре Уральского отделения Российской академии наук. Использовали стереодатчик с малой базой (30 мм) по сравнению с расстоянием до объекта (≈800–900 мм). Для обработки данных применяли методы цифровой фильтрации и математический аппарат корреляционного анализа отраженных гидроакустических сигналов, полученных фазовым методом.

Результаты исследования. Представлены итоги сопоставления двух способов определения пеленга на объект: по разности времени прихода передних фронтов импульсов и по максимуму кросс-корреляционной функции (ККФ). Графически показано изменение пеленга при движении объекта. Использование переднего фронта сигнала обусловило небольшие выбросы значений вдоль всей кривой пеленга (менее 0,12 рад). При максимуме ККФ выбросы фиксировались лишь в некоторых областях, но были довольно значительными (около 0,17 рад). Показано, как выбрать точки, соответствующие более гладкой и валидной траектории объекта, и как работать с ошибочными точками. Представленный метод устранения ошибки можно реализовать программно. При квазигармоничном сигнале редкие измерения исходного сигнала интерполируются частыми вычисленными значениями. Благодаря такому виртуальному увеличению частоты дискретизации (передискретизации) можно фиксировать промежуточные показатели в оцифрованных исходных данных. Интерполяция значений сигнала кубическим сплайном позволила получить 20 точек на 1 период сигнала вместо 5 точек в исходном варианте. В этом случае более корректна траектория, сформированная с максимумом ККФ.

Обсуждение и заключение. Задачу пеленгации можно решить с точностью, необходимой для практического применения. Учет фактора гладкости и непрерывности траектории движения объекта позволяет качественно корректировать выбор максимума кросс-корреляционной функции сигналов стереодатчика. Предложенные методы обладают большим потенциалом для разработки систем подводного видения.

Ключевые слова: определение местоположения объекта в гидросреде, пеленгация фазовым методом, передние фронты импульсов, кросс-корреляционная функция, шум дискретизации

Благодарности. Авторы выражают благодарность отличным инженерам Н.Н. Звереву и А.С. Галузину за помощь в создании технических средств. Исследования, выполненные благодаря их работе, стали основой для написания этой статьи.

Для цитирования. Широков В.А., Баженова А.И., Милич В.Н. Особенности определения пеленга на подводный объект с использованием фазовой информации дифференциального стереодатчика. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2024;24(2):198–206. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-198-206

Original Empirical Research

Features of Bearing on Underwater Object Using Phase Information of a Differential Stereo Sensor

Vladimir A. Shirokov, Aigul I. Bazhenova ✉, Vladimir N. Milich
Udmurt Federal Research Center, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Russian Federation
✉ aigul_bazh@udman.ru

Abstract
Introduction. Safety of navigation and development of underwater mineral deposits require the accurate detection of various underwater objects. The literature discusses the issues of tracking their motion and trajectory. Sonar methods are proposed to maintain high accuracy of underwater object positioning. High accuracy of the bearing of stereo sensors with an ultrashort base is noted. However, this equipment is sensitive to the sampling rate of the signals, which causes "sampling noise". There are no publicly available publications dedicated to the solution to this problem. The presented study is designed to fill this gap. This work is aimed to study the possibility of obtaining data clarifying information about the bearing of underwater objects through using the phase information about echoed probing signals and an additional procedure for resampling the source data.
Materials and Methods. The location of the object was determined using the experimental complex for studying hydroacoustic sensors created by V.A. Shirokov and V.N. Milich at the Udmurt Federal Research Center, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. A stereo sensor with a small base (30 mm) was used compared to the distance to the object (≈800–900 mm). Digital filtering methods and mathematical apparatus of correlation analysis of return hydroacoustic signals obtained by the phase method were used for data processing.
Results. The results of comparing two methods for determining the bearing on an object are presented: by the difference in the time of arrival of the pulse-leading edges and by the maximum of the cross-correlation function (CCF). The change in bearing as the object moves, is graphically shown. The use of the leading edge of the signal caused small outliers of values along the entire bearing curve (less than 0.12 rad). At the maximum CCF, emissions were recorded only in some areas, but they were quite significant (about 0.17 rad). It showed how to select points corresponding to a smoother and more valid object trajectory, and how to work with erroneous points. The presented method of error correction can be implemented programmatically. With a quasi-harmonious signal, rare measurements of the original signal are interpolated by frequent calculated values. Thanks to this virtual increase in the sampling rate (oversampling), intermediate indicators can be recorded in the digitized source data. Interpolation of the signal values by a cubic spline allowed us to obtain 20 points for 1 period of the signal instead of 5 points in the original version. In this case, the trajectory formed with the maximum CCF is more correct.
Discussion and Conclusion. The direction-finding problem can be solved with the accuracy required for practical application. Taking into account the factor of smoothness and continuity of the object's trajectory makes it possible to qualitatively correct the selection of the maximum of the cross-correlation function of the stereo sensor signals. The proposed methods have great potential for the development of underwater vision systems.

Keywords: determination of the location of an object in a hydraulic environment, phase direction finding, pulse-leading edges, cross-correlation function, sampling noise

Acknowledgements. The authors would like to thank excellent engineers N.N. Zverev and A.S. Galuzin for their help in creating technical tools. The research done through their work became the basis for writing this article.

For Citation. Shirokov VA, Bazhenova AI, Milich VN. Features of Bearing on Underwater Object Using Phase Information of a Differential Stereo Sensor. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2024;24(2):198–206. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-198-206

Введение. Обеспечение безопасности судоходства и работы на подводных месторождениях полезных ископаемых требуют качественного обнаружения подводных объектов и отслеживания их перемещений [1]. В системах подводного наблюдения применяются гидроакустические датчики. Они улавливают сигнал, отраженный от объекта, и позволяют вычислить его местоположение методом трилатерации [2]. В этом процессе каждый датчик предоставляет информацию об интервале времени прохождения зондирующего сигнала, отраженного от объекта. В случае использования нескольких датчиков [3] возникает возможность решения задачи обратной пространственной засечки и определения координат наблюдаемого объекта [4]. Для повышения точности измерений представляется перспективным использование в качестве приемника стереодатчиков с ультракороткой базой [5], позволяющих получать фазовую информацию [6] и определять пеленг на объект [7]. Изучены возможности использовании гидролокационных данных об удаленных подводных целях, а также о пеленге подводных объектов [8] за счет использования фазовой [9] или частотной [10] информации отраженных зондирующих сигналов.

При этом известно, что процедура дискретизации сигнала обусловливает ошибки при определении параметров траектории движения подводных объектов [11]. Это относится как к дальномерным измерениям, так и к процедурам определения пеленга. Оцифровка аналогового сигнала датчика, необходимая для дальнейшей цифровой обработки, вносит так называемую «погрешность дискретизации». Погрешность, вызванная квантованием амплитуды сигнала, оценивается количеством уровней квантования аналого-цифрового преобразователя. Погрешность, вызванная дискретизацией по времени, пропорциональна величине интервала времени квантования и скорости изменения напряжения. Поэтому частоту дискретизации сигнала стремятся сделать как можно выше верхней частоты самого сигнала. Однако увеличение частоты дискретизации во многих случаях ограничивается возможностями регистрирующей аппаратуры: процессора, аналого-цифрового преобразователя, каналов передачи данных, устройствами хранения данных. Ограниченность возможностей дискретизации во времени при выполнении траекторных измерений не позволяет точно фиксировать экстремальные значения траектории (дальность и пеленг). Как следствие, снижается точность результатов измерений, появляются выбросы на фиксируемых траекториях. Для устранения этого недостатка необходимо изучить потенциал передискретизации оцифрованного гидроакустического сигнала. В открытом доступе нет публикаций, посвященных решению данной проблемы. Имеющийся пробел восполняют материалы этой статьи.

Цель представленного исследования состоит в оценке возможностей определения пеленга на объект с использованием фазовой информации и в отработке фазового метода пеленгования с применением передискретизации оцифрованного гидроакустического сигнала.

Материалы и методы. Рассматривается алгоритм определения координат с применением пеленгации фазовым методом. Приводятся результаты его тестирования для объекта, движущегося по круговой траектории в экспериментальном бассейне.

Постановка эксперимента. При проведении опытов для определения местоположения объекта в гидросреде при пеленгации фазовым методом задействовали экспериментальную установку, созданную В.А. Широковым и В.Н. Милич в Удмуртском федеральном исследовательском центре Уральского отделения Российской академии наук [12]. Это лабораторный измерительный комплекс с линейной аквасредой в виде протяженного цилиндрического резервуара (гидроволновода) и бассейном, оснащенным системой генерации испытательных гидроакустических сигналов. Ниже детально описаны элементы установки, которые использовались в опытах.

1. Излучатель гидроакустического сигнала с известными координатами S (рис. 1). В работе используется амплитудно-модулированный сигнал [13].

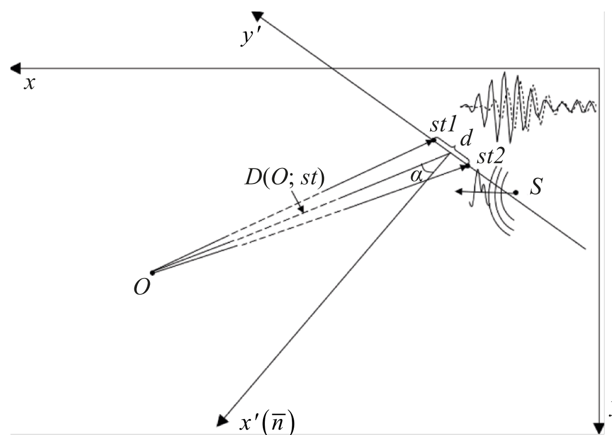


Рис. 1. Расположение принимающих датчиков (стереодатчик с двумя приемниками $st1$ и $st2$) и излучателя (S) в плоскости экспериментального бассейна (xy). Здесь d — база стереодатчика; $D(O; st)$ — расстояние между стереодатчиком и объектом; α — пеленг на объект; плоскость ($x'y'$) образована плоскостью стереодатчика и нормалью n к ней

2. Отражающий объект. В эксперименте в качестве тестового используется протяженный цилиндрический объект — медный провод, диаметр которого (0,15 мм) значительно меньше длины акустической волны (1,5 мм). В представленной работе задача решается на плоскости, поэтому для составления вычислительных процедур расчета координат данный объект можно считать точечным.

3. Стереодатчик, преобразующий гидроакустический сигнал в электрический. Известны координаты каждого из двух приемников стереодатчика (*st*1, *st*2 на рис. 1).

4. Аппаратно-программный комплекс, выполняющий усиление, оцифровку и обработку сигналов датчиков.

Результатом измерений является файл регистрации принимаемого двухканального сигнала.

Алгоритм обработки результатов измерений. Использование стереодатчика с малой базой (30 мм) по сравнению с расстоянием до объекта (≈ 800–900 мм) позволяет применить упрощенные формулы.

Итак, рассчитаем координаты исследуемого объекта в системе *x'y'*, образованной плоскостью стереодатчика и нормалью к ней. Для этого задействуем алгоритм, включающий пять этапов.

1. Предварительная обработка:

– удаление слепой зоны (первые N отсчетов);

– фильтрация сигнала.

В работе применяется высокочастотная фильтрация.

2. Выделение из всего сигнала информативных фрагментов *imp*1, *imp*2 (в двух каналах), содержащих импульсы, отраженные от исследуемого объекта. Для этого выполняется пороговая обработка по амплитуде *A* сигнала. Порог принимается равным *p*×*max*(*A*) (*p* = 0,5).

Такая обработка позволяет определить передний фронт импульса (*BeginIndex*), отраженного от объекта. Из двух каналов сигнала вырезаются участки [*BeginIndex*–0,5×*LenSignal*; *BeginIndex*+*LenSignal*]. Здесь *LenSignal* — длина сигнала, подаваемого на вход. В результате получаем два сигнала *imp*1 и *imp*2 длиной 1,5×*LenSignal*. В каждом из них содержится импульс, отраженный от объекта.

3. Расчет расстояния *D*(*O*; *st*) между объектом и стереодатчиком.

– Определение расстояния, пройденного импульсом от излучателя до объекта и от объекта до датчика приема, по формуле D(S,O,st)=BeginIndex×dt×C. Здесь C=1475 м/с — скорость распространения акустической волны, dt = 0,2×10–6 с — интервал дисктретизации.

– Расчет значения:

$$D(O,st) = \frac{D(S,O,st) - D(S,st)}{2}. \qquad (1)$$

4. Определение пеленга α на объект [14]:

$$\alpha = arcsin\left(\frac{\lambda \times F \times dt \times m}{d}\right), \qquad (2)$$

где λ — длина волны; *F* — частота сигнала; *dt* — интервал дискретизации; *m* — разница прихода отраженного импульса на два стереодатчика (в отсчетах); *d* — база стереодатчика (в представленном исследовании λ = 1,5 мм, *F* = 1 МГц, *dt* = 0,2 мкс, *d* = 30 мм).

5. Вычисление координат анализируемого объекта в системе, образованной плоскостью стереодатчика и его нормалью (рис. 1), по формулам: *x'*=*D*(*O*, *st*) ×cos(α); *y'*=*D*(*O*, *st*) ×sin(α).

Определение пеленга на объект. Примем условие малости стереобазы по сравнению с расстоянием от датчика до объекта. В этом случае стереодатчик позволяет определить пеленг на объект с помощью информации о разности фаз принятых импульсов, ранее отраженных от объекта, а также по разности времени прихода передних фронтов импульсов, поступивших на стереодатчик (рис. 2).

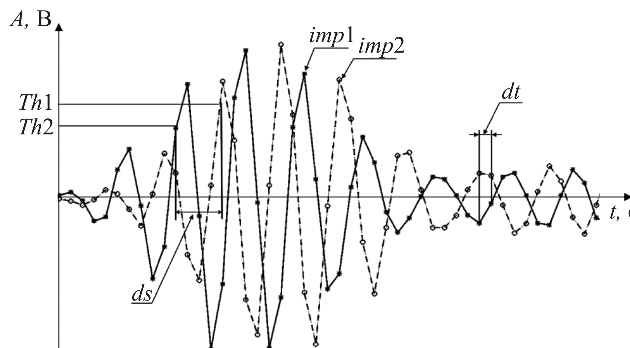


Рис. 2. Определение разности моментов прихода *ds* стереосигналов, которые обозначены сплошной *imp*1(*t*) и пунктирной *imp*2(*t*) линиями. *Th*1, *Th*2 — пороги для первого и второго сигнала стереопары соответственно; *dt* — интервал дискретизации; *A* — значение сигнала в вольтах; *t* — время

Для реализации такого подхода выполняются описанные ниже процедуры.

1. Идентификация моментов прихода передних фронтов стереосигналов с помощью пороговой обработки [15] с порогом $p \times max(A)$. В данной работе коэффициент p принят равным 0,5 [16].

2. Вычисление разности ds (количество интервалов dt) между передними фронтами импульсов, зарегистрированных в двух приемниках стереодатчика.

3. Вычисление пеленга α по формуле (1). За m принимаем значение ds.

При таком способе вычисления сдвига фазы передний фронт сигнала будет главным индикатором импульса, отраженного от объекта. Не учитывается внутренняя структура сигнала, которая может иметь решающее значение для корректного определения пеленга на объект. Учтем схожесть принимаемых сигналов и рассмотрим в работе другой подход к вычислению пеленга — на основе кросс-корреляционной функции (ККФ) стереосигналов. Логично определять сдвиг фазы по максимуму ККФ. Ниже описаны элементы алгоритма вычисления пеленга с помощью ККФ.

1. Расчет ККФ импульсов, поступивших на два приемника одного стереодатчика: r = xcorr(imp1, imp2). Значение функции xcorr при смещении m второго сигнала относительно первого вычисляется следующим образом:

$$\mathrm{xcorr}_{imp1,imp2}(m)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N-m-1} imp1_{n+m}\times imp2_n, & m\geq 0,\\ \mathrm{xcorr}_{imp2,imp1}(-m), & m<0.\end{cases}$$

Здесь N — длина $imp1$ и $imp2$, $-N<m<N$.

2. Определение максимума ККФ и соответствующего ему сдвига dc (в отсчетах).

3. Вычисление пеленга α по формуле (1) с учетом, что за m принимается величина dc.

Результаты исследования

Тестирование методов определения пеленга. Представленные способы определения пеленга на объект (по разности времени прихода передних фронтов импульсов и по максимуму ККФ) протестировали для объекта, движущегося по круговой траектории в экспериментальном бассейне. Использовался гармонический сигнал длительностью 7 периодов и частотой 1 МГц. Оцифрованные стереосигналы регистрировались в 256 точках траектории движения объекта. Частота оцифровки — 5 МГц.

На рис. 3 показано изменение значений пеленга по мере движения объекта по окружности для двух предложенных подходов (разница передних фронтов, максимум ККФ).

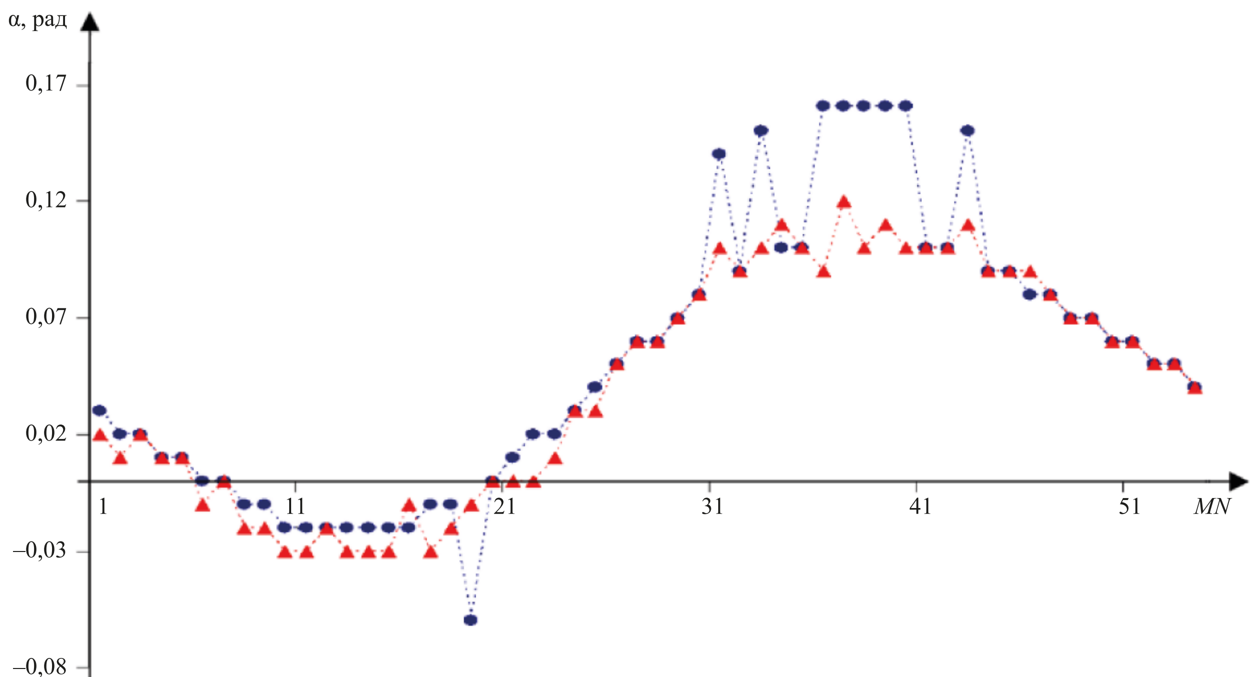


Рис. 3. Изменение пеленга α на объект, совершающий круговое движение. Показатели получены при использовании двух подходов (красный маркер — разница времени прихода передних фронтов стереосигналов, синий маркер — максимум ККФ). MN — номер измерения, α — пеленг на объект

При использовании переднего фронта сигнала (рис. 3, красный маркер) почти вдоль всей кривой изменения пеленга на объект наблюдаются небольшие выбросы значений. При использовании максимума ККФ (рис. 3, синий маркер) только в некоторых областях присутствуют выбросы значений пеленга, но они достаточно большие. Возможно, это объясняется особенностями движения объекта в области, где зондирующий и отраженный сигналы пересекают зону турбулентности, вызванной движением объекта. При нахождении фазового сдвига стереосигналов с помощью максимума ККФ возникают дополнительные ошибки, что затем отражается в вычисленной траектории объекта. Также выбросы в вычисленных значениях пеленга могут быть обусловлены недостаточно высокой частотой дискретизации. Значения этих ошибок существенно выше показателей выбросов, наблюдаемых для метода с использованием переднего фронта импульса.

На рис. 4 *а* представлены траектории движения объекта, вычисленные с использованием глобального максимума ККФ и его соседних локальных максимумов.

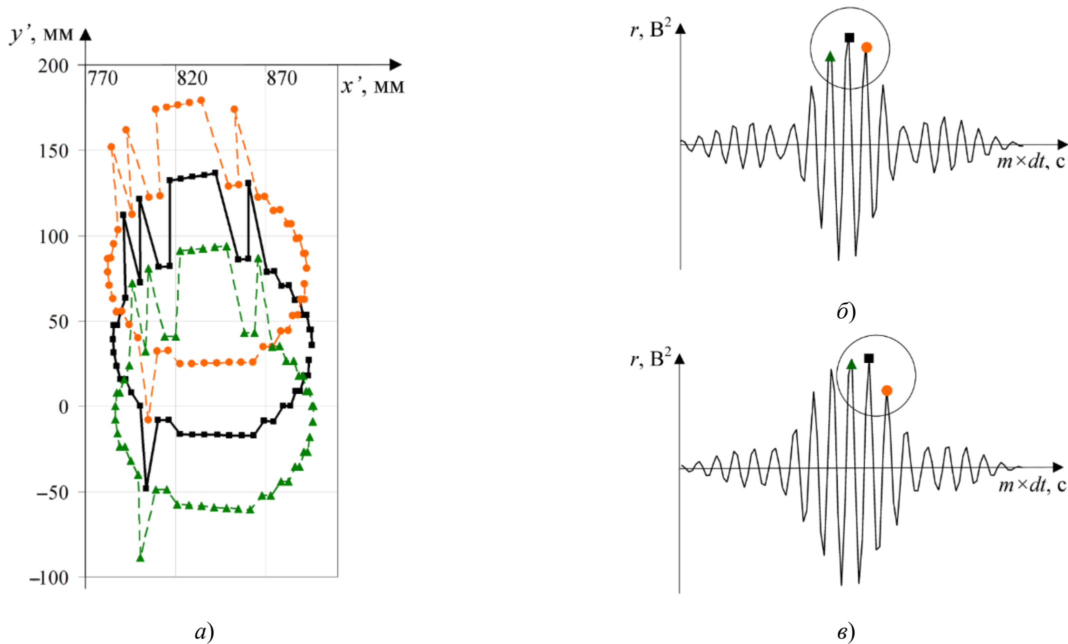


Рис. 4. Анализ траекторий кругового движения объекта: *а* — траектории, вычисленные с использованием глобального максимума ККФ (черный маркер), локального ближайшего правого максимума ККФ (оранжевый маркер), локального ближайшего левого максимума ККФ (зеленый маркер); *б* — пример ККФ, глобальный максимум которой соответствует корректному значению координат объекта; *в* — пример ККФ, в которой корректному значению координат объекта соответствует левый локальный максимум ККФ

Используя априорную информацию о плавности перемещения экспериментального объекта, можно выбрать точки, которые соответствуют более гладкой и валидной траектории. Такой подход применяется в других работах [17]. На рис. 4 *а* при $x' \in [800;870]$, $y'>0$ корректные значения находятся на кривой для траектории, рассчитанной по левому локальному максимуму ККФ. Есть также ошибочные точки. Если их заменить точками траектории, полученной в результате использования правого локального максимума ККФ, можно вычислить корректное значение точки траектории ($x' \approx 800$, $y'<0$ на рис. 4 *а*). Данный графический метод устранения ошибки может быть реализован программно.

Таким образом, в некоторых точках траектории корректный сдвиг фазы стереосигналов, необходимый для вычисления пеленга, может соответствовать не глобальному максимуму ККФ, а одному из соседних локальных экстремумов (рис. 4 *б*, *в*). Такое смещение максимумов ККФ может быть обусловлено недостаточно высокой частотой дискретизации сигналов. Этим же объясняется ступенчатый характер результирующей траектории.

С учетом квазигармоничности сигнала предлагается использовать интерполяцию редких измерений исходного сигнала частыми вычисленными значениями. Такое виртуальное увеличение частоты дискретизации (передискретизации) дает возможность зафиксировать промежуточные значения в оцифрованных исходных данных. Интерполяция значений сигнала кубическим сплайном позволила получить 20 точек на 1 период сигнала вместо 5 точек в исходном варианте. На рис. 5 приведены расчетные траектории движения объекта, сформированные с предварительной передискретизацией сигналов.

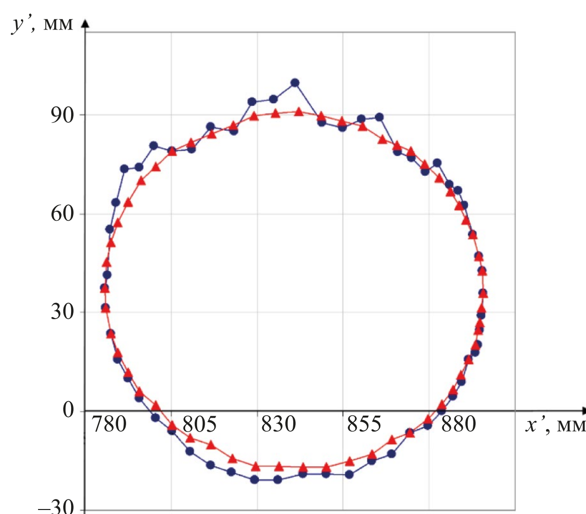


Рис. 5. Расчетные траектории движения объекта, полученные для стереосигналов с виртуально повышенной частотой дискретизации: синий маркер — используется разница времени прихода передних фронтов сигналов; красный маркер — используется максимум ККФ)

Красная линия — это траектория движения объекта, полученная с использованием максимума ККФ для расчета пеленга по предварительно интерполированным данным. Она представляется более корректной по сравнению с аналогичной траекторией, полученной с использованием разницы передних фронтов отраженных импульсов (синяя линия).

Обсуждение и заключение. Анализ особенностей определения пеленга на подводный объект с использованием взаимной фазовой информации сигналов дифференциального стереодатчика дает возможность сделать следующие выводы:

– разность времени прихода передних фронтов импульсов, зарегистрированных стереодатчиком, позволяет получать значения пеленга, показывающие направление на объект. Качество результата зависит от принятой величины порога (используемого при определении переднего фронта импульса) и изменчивости амплитуд принимаемых сигналов;

– применение подхода с использованием максимума кросс-корреляционной функции при недостаточной частоте дискретизации исходных сигналов приводит к существенным выбросам в расчетной траектории (рис. 3);

– передискретизация сигналов с помощью интерполяции исходных квазигармонических сигналов с использованием максимума ККФ для расчета пеленга и координат объекта позволяет получить гладкую траекторию (рис. 5), соответствующую плавному перемещению объекта по кругу. Такой подход требует значительно больших вычислительных затрат в сравнении с другими, рассмотренными в этой статье. Это может повлиять на скорость обработки сигналов в режиме реального времени.

Таким образом, исследованные возможности уточнения фазового метода пеленгации (передискретизация оцифрованных сигналов и использование максимума ККФ) позволяют эффективно оценивать траекторию движения подводного объекта.

Описаны условия получения гладкой корректной траектории движения отслеживаемого объекта. Этой цели служит передискретизация оцифрованных с недостаточной частотой дискретизации интерполированных квазигармонических стереосигналов. Вместе с этим задействуется метод расчета пеленга, использующий максимум кросс-корреляционной функции сигналов стереодатчика.

Данные на рис. 5 подтверждают, что задачу пеленгации можно решить с точностью, необходимой для практического применения. Учет фактора гладкости и непрерывности траектории движения объекта позволяет однозначно корректировать выбор максимума кросс-корреляционной функции сигналов стереодатчика (рис. 4).

Предложенные методы имеют большое значение для разработки систем подводного видения.

Список литературы / References

1. Meng Joo Er, Jie Chen, Yani Zhang, Wenxiao Gao. Research Challenges, Recent Advances, and Popular Datasets in Deep Learning-Based Underwater Marine Object Detection: A Review. *Sensors*. 2023;23(4):1990. https://doi.org/10.3390/s23041990

2. Андреев М.Я., Охрименко С.Н., Паршуков В.Н., Рубанов И.Л., Козловский С.В., Илларионов А.А. Бистатическая система обнаружения подводной цели (бистатический гидролокатор). *Датчики и системы*. 2019;233(2):50–56.

Andreev MYa, Ochrimenko SN, Parshukov VN, Rubanov IL, Kozlovsky SV, Illarionov AA. Bistatic System for Searching Underwater Objects (Bistatic Hydrolocator). *Sensors & Systems.* 2019;233(2):50–56.

3. Матвеева И.В., Шейнман Е.Л. Определение текущих координат цели в бистатическом режиме гидролокации при неопределенности оценки пеленга на цель. *Гидроакустика*. 2017;31(3):9–12.

Matveeva IV, Shejnman EL. Determination of Current Target Coordinates in Bistatic Echo Ranging Mode at Uncertainty of Bearing Estimation. *Hydroacoustics.* 2017;31(3):9–12.

4. Matveeva IV, Sheinman EL, Shkol'nikov IS. Efficiency of Determination of Coordinates and Motion of Sea Objects at Bistatic Location of Moving Observing Systems. *Hydroacoustics.* 2016;26(2):28–32.

Матвеева И.В., Шейнман Е.Л., Школьников И.С. Эффективность определения координат и параметров движения морских объектов при бистатической локации перемещающихся систем наблюдения. *Гидроакустика*. 2016;26(2):28–32.

5. Арсентьев В.Г., Криволапов Г.И. Позиционирование объектов в гидроакустической навигационной системе с ультракороткой базой. *Вестник Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики*. 2018;(4):66–75.

Arsent'ev V, Krivolapov G. Positioning of Objects in Hydroacoustic Navigation System with Ultrashort Base. *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science*. 2018;(4):66–75.

6. Матвиенко Ю.В., Хворостов Ю.А., Кулешов В.П. Особенности применения скалярно-векторных приемников звука в системах контроля подводной обстановки локальных районов. *Подводные исследования и робототехника*. 2022;42(4):4–15. https://doi.org/10.37102/1992-4429_2022_42_04_01

Matvienko YuV, Khvorostov YuA, Kuleshov VP. Peculiarities of Application of Scalar-Vector Sound Receivers in Systems for Control of Underwear Situation in Local Areas. *Underwater Investigations and Robotics.* 2022;42(4):4–15. https://doi.org/10.37102/1992-4429_2022_42_04_01

7. Terrachiano DS, Costanzi R, Manzari V, Stifani M, Caiti A. Passive Bearing Estimation Using a 2-D Acoustic Vector Sensor Mounted on a Hybrid Autonomous Underwater Vehicle. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2022;47(3):799–814. https://doi.org/10.1109/JOE.2021.3132647

8. Yanhou Zhang, Chao Wang, Qi Zhang, Lianglong Da, Zhaozhen Jiang. Bearing-only Motion Analysis of Target Based on Low-Quality Bearing-Time Recordings Map. *IET Radar, Sonar & Navigation*. 2024;18(5):765–781. https://doi.org/10.1049/rsn2.12519

9. Профатилова Г.А., Соловьев Г.Н. Измерение малых углов места фазовым методом в условиях интерференции. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение»*. 2013;90(1):3–12.

Profatilova GA, Soloviev GN. Low Elevation Measurements Using Phase Method in the Presence of Interference. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering.* 2013;90(1):3–12.

10. Каевицер В.И., Кривцов А.П., Смольянинов И.В., Элбакидзе А.В. Частотный метод измерения угловых координат подводного аппарата гидроакустической системой локального позиционирования. *Журнал радиоэлектроники*. 2021;3:11. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.3.1

Kaevitser VI, Krivtsov AP, Smolyaninov IV, Elbakidze AV. Frequency Method for Measuring the Angular Coordinates of an Underwater Vehicle by a Hydroacoustic System of Local Positioning. *Journal of Radio Electronics.* 2021;3:11. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.3.1

11. Арсентьев В.Г., Криволапов В.И. О характеристиках фазового пеленгатора гидроакустической системы приведения автономного необитаемого подводного аппарата. *Вестник Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики*. 2021;53(1):23–35. https://doi.org/10.55648/1998-6920-2021-15-1-23-35

Arsent'ev V, Krivolapov G. On the Characteristics of Phase Direction Finder of the Hydroacoustic System Drive for Delivering Autonomous Uninhabited Underwater Vehicle. *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science.* 2021;53(1):23–35. https://doi.org/10.55648/1998-6920-2021-15-1-23-35

12. Широков В.А., Милич В.Н. Экспериментальный комплекс для исследования возможностей использования гидроакустических датчиков в системах подводного видения. *Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова*. 2021;24(4):54–64. https://doi.org/10.22213/2413-1172-2021-4-54-64

Shirokov VA, Milich VN. Experimental Complex for Studying the Possibilities of Using Hydroacoustic Sensors in Underwater Vision Systems. *Vestnik IzhGTU named after M.T. Kalashnikov.* 2021;24(4):54–64. https://doi.org/10.22213/2413-1172-2021-4-54-64

13. Арсентьев В.Г., Криволапов Г.И. Гидроакустический фазовый пеленгатор с амплитудно-модулированным навигационным сигналом. *Вестник Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики*. 2021;54(2):14–26. https://doi.org/10.55648/1998-6920-2021-15-2-14-26

Arsent'ev V, Krivolapov G. Hydroacoustic Phase Direction Finder with Amplitude-Modulated Navigation Signal. *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science.* 2021;54(2):14–26. https://doi.org/10.55648/1998-6920-2021-15-2-14-26

14. Матвиенко Ю.В. Оценка практически достижимой точности современных гидроакустических навигационных систем с ультракороткой измерительной базой для подводных роботов. *Гироскопия и навигация*. 2023;31(2):106–120.

Matvienko YuV. Estimation of the Practically Attainable Accuracy of Modern Ultrashort Baseline Hydroacoustic Navigation Systems for Underwater Robots. *Gyroscopy and Navigation.* 2023;14(2):166.

15. Егоров С.Б., Горбачев Р.И. Определение порогов селекции по уровню и длительности в обнаружителях с нормализованным индикаторным процессом. *Морские интеллектуальные технологии*. 2020;2(2):144–147. https://doi.org/10.37220/MIT.2020.48.2.056

Egorov SB, Gorbachev RI. Determination of Level and Time Thresholds for Detectors with Normalized Indicator Process. *Marine Intellectual Technologies.* 2020;2(2):144–147. https://doi.org/10.37220/MIT.2020.48.2.056

16. Abraham DA. *Underwater Acoustic Signal Processing. Modeling, Detection, and Estimation*. Cham: Springer; 2019. P. 457–619. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92983-5

17. Денисов В.П., Дубинин Д.В., Крутиков М.В., Мещеряков А.А. Алгоритм отбраковки аномально больших ошибок пеленгования фазовым пеленгатором. *Доклады ТУСУР*. 2012;26(2):36–42.

Denisov VP, Dubinin DV, Krutikov MV, Mescheryakov AA. Algorithm of Abnormal Direction Errors Rejecting for Phase Finder. *Proceedings of TUSUR University.* 2012;26(2):36–42.

Об авторах:

Владимир Анатольевич Широков, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук (426067, Российская Федерация, г. Ижевск, ул. им. Татьяны Барамзиной, 34), SPIN-код: 9007–5928, ORCID, ResearcherID, shirokovva@udman.ru

Айгуль Илсуровна Баженова, кандидат технических наук, научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук (426067, Российская Федерация, г. Ижевск, ул. им. Татьяны Барамзиной, 34), SPIN-код: 5641-9184, ORCID, ResearcherID, ScopusID, aigul_bazh@udman.ru

Владимир Николаевич Милич, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Удмуртского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук (426067, Российская Федерация, г. Ижевск, ул. им. Татьяны Барамзиной, 34), SPIN-код: 5612–2634, ORCID, ResearcherID, ScopusID, mili@udman.ru

About the Authors:

Vladimir A. Shirokov, Cand.Sci. (Eng.), Senior Researcher, Udmurt Federal Research Center, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (34, T. Baramzina Str., Izhevsk, 426067, Russian Federation), SPIN-code: 9007–5928, ORCID, ResearcherID, shirokovva@udman.ru

Aigul I. Bazhenova, Cand.Sci. (Eng.), Researcher, Udmurt Federal Research Center, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (34, T. Baramzina Str., Izhevsk, 426067, Russian Federation), SPIN-code: 5641-9184, ORCID, ResearcherID, ScopusID, aigul_bazh@udman.ru

Vladimir N. Milich, Cand.Sci. (Eng.), Leading Researcher, Udmurt Federal Research Center, the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (34, T. Baramzina Str., Izhevsk, 426067, Russian Federation), SPIN-code: 5612–2634, ORCID, ResearcherID, ScopusID, mili@udman.ru

Заявленный вклад авторов:

В.А. Широков: формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение экспериментов.
А.И. Баженова: обработка и анализ результатов, подготовка текста и рисунков.
В.Н. Милич: постановка задачи, формирование выводов, доработка текста.

Claimed Contributorship:

VA Shirokov: basic concept formulation, research objectives and tasks, conducting experiments.
AI Bazhenova: processing and analysis of the results, preparation of the text and figures.
VN Milich: tasks formulation, drawing conclusions, finalizing the text.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Conflict of Interest Statement: **the authors declare no conflict of interest.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 22.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 05.04.2024
Принята к публикации / Accepted 12.04.2024